



Universidad  
Carlos III de Madrid

*Departamento de Ingeniería Mecánica*

***PROYECTO FIN DE CARRERA***

# **CÁLCULO DE LA ENERGÍA DE UN VEHÍCULO SHELL ECO-MARATHON**

***Ingeniería Industrial***

Autor: D. José Manuel Gismera Pérez

Tutor: Dra. Dña. Beatriz López Boada

*Leganés, marzo de 2011*



Título: Cálculo de la energía de un vehículo Shell Eco-Marathon

Autor: D. José Manuel Gismera Pérez

Director: Dra. Dña. Beatriz López Boada

## EL TRIBUNAL

Presidente: Dña. Ester Olmeda Santamaría

Vocal: D. Rana Farag

Secretario: D. Francisco José Rodríguez Urbano

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día 16 de mayo de 2011 en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

## Agradecimientos

A mis padres, a mi hermano, familiares y amigos.

## Resumen

Shell Eco-Marathon es una competición internacional que promueve la innovación y creatividad de estudiantes de todo el mundo con el objetivo construir vehículos eficientes energéticamente. El objetivo de este documento es calcular la energía que necesita el vehículo para recorrer el circuito Eurospeedway de Lausitz acorde a las exigencias de la competición. Para el estudio del movimiento se emplean las ecuaciones de la mecánica clásica que desarrolló Joseph Louis Lagrange en 1788.

### Palabras clave:

- Ecuaciones de Lagrange
- Multiplicadores de Lagrange

## Abstract

Shell Eco-Marathon is an international competition that promotes innovation and creativity of students all around the world in order to build energy efficient vehicles. The aim of this document is to calculate the energy that a vehicle needs to cover the distance of the Lausitz Eurospeed circuit according to the competition requirements. The equations developed by Joseph Louis Lagrange in 1788 are used for the motion study.

### Keywords:

- Lagrange equations
- Lagrange multipliers

## Índice general

1	Introducción.....	1
1.1	Preámbulo .....	1
1.2	Contaminación atmosférica y emisiones de vehículos .....	1
1.3	Objetivos.....	3
1.4	Estructura del proyecto.....	3
2	Shell Eco-Marathon.....	5
2.1	Normativa .....	5
2.2	Tipos de fuentes de energía .....	7
2.2.1	Motores de combustión interna.....	7
2.2.1.1	Shell FuelSave Unleaded 95 .....	7
2.2.1.2	Shell FuelSave Diesel.....	7
2.2.1.3	Etanol E100 (100% Etanol) .....	7
2.2.1.4	Shell Gas to Liquid (100 % GTL) .....	7
2.2.1.5	Fatty Acid Methyl Ester (100% FAME) .....	8
2.2.2	Motores eléctricos .....	8
2.2.2.1	Hidrógeno .....	8
2.2.2.2	Energía Solar .....	8
2.2.2.3	‘Plug in’ electricity.....	8
2.3	Tipos de vehículos.....	9
3	Dinámica vehicular.....	10
3.1	Dinámica longitudinal .....	10
3.1.1	Fuerzas de resistencia en el movimiento de avance del vehículo .....	12
3.1.1.1	Resistencia por rodadura .....	13
3.1.1.2	Resistencia aerodinámica.....	14
3.2	Dinámica lateral .....	15
3.2.1	Cálculo aproximado de la velocidad límite de derrape .....	16
3.2.2	Cálculo aproximado de la velocidad límite de vuelco.....	18
3.2.3	Estabilidad en un vehículo Shell Eco-marathon .....	19
4	Ecuaciones de Lagrange .....	21
4.1	Principio de D’Alembert .....	21
4.2	Obtención de las Ecuaciones de Lagrange a través del principio de D’Alembert .....	23
4.3	Principio de Hamilton.....	27
4.4	Dedución de las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton .....	29
4.5	Restricciones en el movimiento.....	31

5	Ecuaciones de Lagrange aplicadas a un vehículo Shell Eco-Marathon.....	35
5.1	Modelización de tramos rectos .....	37
5.2	Modelización de tramos curvos.....	41
6	Circuito EuroSpeedway Lausitz.....	45
6.1	Coordenadas de los puntos del circuito.....	47
6.2	Perfil del circuito .....	51
6.3	Datos de los tramos .....	53
6.3.1	Tramos rectos .....	53
6.3.2	Tramos curvos.....	55
7	Resultados .....	60
7.1	Fuerza de tracción constante .....	67
7.1.1	Resultados para la vuelta lanzada .....	67
7.1.2	Resultados para las 7 vueltas .....	70
7.1.2.1	Primera vuelta .....	71
7.1.2.2	Segunda vuelta .....	74
7.1.2.3	Tercera a séptima vuelta .....	77
7.2	Potencia constante .....	80
7.2.1	Resultados para una vuelta lanzada .....	80
7.2.2	Resultados para las 7 vueltas .....	84
7.2.2.1	Primera vuelta .....	86
7.2.2.2	Segunda a séptima vuelta .....	89
7.3	Recorrido del vehículo .....	92
7.4	Comprobación de los resultados obtenidos.....	94
7.4.1	Comprobación de las rectas .....	94
7.4.2	Comprobación de las curvas.....	95
8	Conclusiones y trabajos futuros .....	97
9	Referencias .....	100
ANEXO A	Plano del circuito Eurospeedway de Lausitz .....	101
ANEXO B	Cálculo de la fuerza lateral y la fuerza normal de un vehículo sobre un tramo peraltado.....	102



## Índice de figuras

Figura 1: Prototipo [7] .....	9
Figura 2: Urban concept [7] .....	9
Figura 3: Modelo plano para el estudio de la dinámica longitudinal [2] .....	11
Figura 4: Fuerzas de resistencia a la rodadura en ambos ejes del vehículo [2] .....	13
Figura 5: Isolíneas de presión sobre la superficie de la carrocería de un vehículo [2] .....	14
Figura 6: Posición en la que se considera aplicada la fuerza aerodinámica [2].....	15
Figura 7: Modelo bidimensional para el cálculo aproximado de las velocidades límite de derrape y de vuelco .....	16
Figura 8: Triángulo de estabilidad para un vehículo de tres ruedas .....	19
Figura 9: Coordenadas y fuerzas de un sistema de partículas.....	21
Figura 10: Camino del punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones .....	29
Figura 11: Modelización del vehículo .....	36
Figura 12: Modelización tramo recto .....	37
Figura 13: Modelización tramo curvo.....	41
Figura 14: EuroSpeedway Lausitz [9].....	45
Figura 15: Variantes del complejo EuroSpeedway Lausitz [8] .....	46
Figura 16: Ovalo triangular EuroSpeedway Lausitz [8].....	46
Figura 17: Zonas de otros trazados de la recta 2 .....	48
Figura 18: Zonas de escapatoria de la recta 2 .....	48
Figura 19: Zonas de otros trazados de la recta 3 .....	49
Figura 20: Zonas de escapatoria de la recta 3 .....	49
Figura 21: Trazado del circuito.....	51
Figura 22: Perfil del recorrido .....	53
Figura 23: Cálculo de radio y centro de un tramo curvo .....	55
Figura 24: Esquema de la resolución de las ecuaciones de Lagrange para las 7 vueltas a fuerza de tracción constante .....	61
Figura 25: Esquema de la resolución de las ecuaciones de Lagrange para las 7 vueltas a potencia constante .....	62
Figura 26: Esquema de la resolución de las ecuaciones de Lagrange para la vuelta lanzada a fuerza de tracción constante .....	63
Figura 27: Esquema de la resolución de las ecuaciones de Lagrange para la vuelta lanzada a potencia constante .....	64
Figura 28: Velocidad-espacio para la vuelta lanzada a fuerza de tracción constante .....	67
Figura 29: Velocidad-Espacio para las 7 vueltas a fuerza de tracción constante .....	70
Figura 30: Velocidad-espacio para la primera vuelta a fuerza de tracción constante.....	71

Figura 31: Velocidad-tiempo para la primera vuelta a fuerza de tracción constante .....	72
Figura 32: Velocidad-espacio para la segunda vuelta a fuerza de tracción constante .....	75
Figura 33: Velocidad-tiempo para la segunda vuelta a fuerza de tracción constante.....	75
Figura 34: Velocidad-espacio para la tercera a séptima vuelta a fuerza de tracción constante .....	78
Figura 35: Velocidad-tiempo para la tercera a séptima vuelta a fuerza de tracción constante .....	78
Figura 36: Velocidad-espacio para la vuelta lanzada a potencia constante.....	81
Figura 37: Velocidad-tiempo para la vuelta lanzada a potencia constante .....	82
Figura 38: Velocidad-Espacio para las 7 vueltas a potencia constante.....	85
Figura 39: Velocidad-tiempo para las 7 vueltas a potencia constante .....	85
Figura 40: Velocidad-espacio para la primera vuelta.....	86
Figura 41: Velocidad-tiempo para la primera vuelta .....	87
Figura 42: Velocidad-espacio para la segunda vuelta hasta la séptima.....	90
Figura 43: Velocidad-tiempo para la segunda vuelta hasta la séptima .....	90
Figura 44: Recorrido del circuito .....	93
Figura 45: Vista 1 del circuito en 3D .....	93
Figura 46: Vista 2 del circuito en 3D .....	94
Figura 47: Vehículo circulando por una recta con peralte .....	95
Figura 48: Plano reducido del circuito Eurospeedway de Lausitz [7] .....	101
Figura 49: Fuerza lateral y normal de un vehículo circulando por una curva .....	102

## Índice de tablas

Tabla 1: Coordenadas de los puntos del circuito .....	50
Tabla 2: Cota y distancia de cada punto .....	52
Tabla 3: Pendiente de cada tramo .....	54
Tabla 4: Coordenadas del centro y radio de la curva 1 .....	58
Tabla 5: Coordenadas del centro y radio de la curva 2 .....	58
Tabla 6: Coordenadas del centro y radio de la curva 3 .....	59
Tabla 7: Resultados para una vuelta lanzada a fuerza de tracción constante .....	67
Tabla 8: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta lanzada a fuerza de tracción constante.....	68
Tabla 9: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta lanzada a fuerza de tracción constante.....	69
Tabla 10: Resultados para 7 vueltas a fuerza de tracción constante.....	70
Tabla 11: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta 1 de 7 a fuerza de tracción constante.....	72
Tabla 12: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta 1 de 7 a fuerza de tracción constante.....	73
Tabla 13: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta 2 de 7 a fuerza de tracción constante.....	76
Tabla 14: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta 2 de 7 a fuerza de tracción constante.....	77
Tabla 15: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vueltas 3 a 7 a fuerza de tracción constante.....	79
Tabla 16: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vueltas 3 a 7 a fuerza de tracción constante.....	80
Tabla 17: Resultados para una vuelta lanzada a potencia constante .....	81
Tabla 18: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta lanzada a potencia constante .....	82
Tabla 19: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta lanzada a potencia constante .....	83
Tabla 20: Resultados para las 7 vueltas a potencia constante .....	84
Tabla 21: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta 1 de 7 a potencia constante .....	87
Tabla 22: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta 1 de 7 a potencia constante .....	88
Tabla 23: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vueltas 2 a 7 a potencia constante .....	91

Tabla 24: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vueltas 2 a 7 a potencia constante .....	92
--	----

# 1 Introducción

## 1.1 Preámbulo

Uno de los objetivos clave de la política de transporte de la UE es disociar el crecimiento económico del crecimiento del transporte. Se ha tomado este objetivo ante el continuo crecimiento del volumen del transporte que supone una amenaza a la conservación de la biodiversidad y un alto consumo energético que representa el 45% de la demanda total de derivados del petróleo y es responsable del 87% de las emisiones de CO, del 66% de NO<sub>x</sub>, del 60% de CO<sub>2</sub> y del 5% de SO<sub>2</sub>.

Para alcanzar este objetivo las Directivas europeas proponen para el año 2020 sustituir un 20% el consumo de combustible tradicional por carburantes alternativos, y aplicar incentivos fiscales cuando se utilicen este tipo de carburantes.

La protección del medio ambiente es una de las prioridades de la Comisión Europea, y se han emprendido varias iniciativas para apoyar la innovación tecnológica y promover la eficiencia energética.

## 1.2 Contaminación atmosférica y emisiones de vehículos

El transporte es la causa principal de la contaminación del aire en las regiones urbanas. Los motores de combustión interna son los que mayores sustancias contaminantes emiten a la atmósfera, estas sustancias son los HCs, CO, CO<sub>2</sub>, NO<sub>x</sub> y las partículas [1]:

- NO<sub>x</sub>: tan solo el NO y el NO<sub>2</sub> de los óxidos de nitrógeno conocidos son considerados contaminantes. Sus efectos son, entre otros, las alteraciones pulmonares (bronquitis infantil y fibrosis pulmonar crónica), es un fuerte irritante y al reaccionar con el agua produce HNO<sub>3</sub> el cual forma parte de la lluvia ácida.
- HCs: se producen principalmente en el arranque en frío y calentamiento del vehículo. Aunque no existen datos que indiquen un efecto directo sobre la atmósfera, derivados como el benceno contenido en las gasolinas, muestran una alta actividad cancerígena.
- CO: el monóxido de carbono afecta notablemente a la capacidad respiratoria, en cantidades considerables impide que la sangre pueda transportar oxígeno.

- CO<sub>2</sub>: es el principal elemento causante del efecto invernadero. Aunque es un gas esencial para la vida en cantidades tan elevadas se considera contaminante.
- Partículas: La mayor parte de las partículas provienen del desgaste de las ruedas y los frenos entre otros. Su tamaño oscila desde tamaños inferiores a 100 nm a 1 µm. Las partículas más grandes se depositan en los pulmones y pueden producir enfermedades pulmonares graves como alergias o cáncer pulmonar.

Son bien conocidas las consecuencias del uso de energías fósiles en vehículos, sin embargo todas ellas tienen el común que la solución pasa por disminuir el consumo y por lo tanto las emisiones de los residuos de la combustión a la atmósfera. La directiva europea es consciente de ello y por eso fija los límites máximos de las emisiones en los automóviles de pasajeros y vehículos comerciales así como la calidad de los combustibles. La aplicación de estos límites fue efectiva en 2005 con la implantación de la norma EURO IV, la cuarta norma aplicada desde la EURO I. El reglamento se refiere a vehículos de categorías M1, M2, N1 y N2 cuya masa de referencia no supera los 2.610 kg. En estos grupos se incluyen los coches particulares, camionetas y vehículos comerciales tanto de transporte de pasajeros como de mercancías [2].

Con motivo del endurecimiento en la limitación de la contaminación producida por los vehículos se introdujeron dos nuevas normas relativas a las emisiones de los vehículos a motor y sus recambios específicos, las normas EURO 5 y EURO 6.

El reglamento contempla una amplia gama de emisiones con el propósito de limitar al máximo el impacto de los vehículos de carretera sobre el medio ambiente. Estas emisiones son el monóxido de carbono (CO), hidrocarburos no metanos e hidrocarburos totales, óxidos de nitrógeno (NO<sub>x</sub>) y partículas. El Reglamento hace especial insistencia en la reducción de partículas y óxidos de nitrógeno especialmente en vehículos diésel.

La norma EURO 5 entró en vigor, pero tan solo para la homologación, el 1 septiembre del 2009 y para la matriculación y venta de los nuevos vehículos a partir del 1 de enero de 2011. Las limitaciones se aplican distintamente para coches diésel y para coches de gasolina o que funcionan con gas natural o GLP. Para los coches diésel los límites son:

- 500 mg/km en monóxido de carbono
- 5 mg/km en partículas
- 180 mg/km en óxidos de nitrógeno

- 230 mg/km en emisiones combinadas de hidrocarburos y óxidos de nitrógeno.

Para los vehículos que funcionan con gasolina, gas natural o GLP los límites son:

- 1.000 mg/km en monóxido de carbono
- 68 mg/km en hidrocarburos no metanos
- 100 mg/km en hidrocarburos totales
- 60 mg/km en óxidos de nitrógeno
- 5 mg/km en partículas pero solo aplicable a vehículos de inyección directa que funcionan con combustión pobre.

La norma EURO 6 se aplicará en lo referente a homologación a partir del 1 de septiembre de 2014 y en lo referente a la matriculación y venta a partir del 1 de septiembre de 2015. En esta norma se obliga a disminuir notablemente las emisiones de óxidos de nitrógeno en los motores diésel, así como sus emisiones combinadas de hidrocarburos y óxidos de nitrógeno.

A partir de la entrada en vigor de las normas EURO 5 y EURO 6, los estados miembros deberán rechazar la homologación, matriculación, venta y puesta en servicio de aquellos vehículos que no respeten los límites de emisión. Como única exclusión se admite un periodo suplementario de un año a vehículos de transporte de mercancías y vehículos destinados a cubrir necesidades sociales específicas.

### 1.3 Objetivos

El objetivo de este proyecto es calcular la energía que el vehículo prototipo destinado a participar en la competición Shell Eco-Marathon necesita para recorrer 8 vueltas al circuito Eurospeedway a una velocidad media de 30 km/h empleando las ecuaciones de Lagrange.

### 1.4 Estructura del proyecto

El proyecto se estructura en 8 capítulos. En el capítulo 2 se describe la competición Shell Eco-marathon. En el capítulo 3 se obtienen las expresiones de la dinámica longitudinal y lateral de un vehículo. En el capítulo 4 se obtienen las ecuaciones de Lagrange que describen el movimiento del vehículo a estudiar, una vez obtenidas las ecuaciones de Lagrange se procede a la modelización del vehículo en el capítulo 5. En

el capítulo 6 se obtienen los datos del trayecto por el cual el vehículo se desplaza. Una vez obtenidas las ecuaciones que rigen el movimiento del vehículo los resultados obtenidos se muestran en el capítulo 7. En el capítulo 8 se exponen las conclusiones obtenidas y los trabajos futuros.



## 2 Shell Eco-Marathon

El reto que la competición Shell Eco-Marathon ha propuesto durante los últimos 20 años es recorrer la mayor distancia posible con el menor consumo de combustible. Todos los equipos participantes deben concebir y fabricar su propio vehículo. Esta competición se celebra mundialmente en tres distintos escenarios dependiendo del área geográfica donde los equipos estén ubicados, éstos son Europa, América y Asia.

El récord actual de la Shell Eco-marathon europea para un motor de combustión, está en poder del equipo de La Joliverie Projet Microjule, con una distancia teórica recorrida de 2.967,4 km con tan solo un litro de gasolina.

Para los prototipos que funcionan con pilas de combustible, el récord es aún más impresionante. El vehículo construido por el equipo de Polytech' Nantes (Figura 1), logró en 2010 recorrer la distancia teórica de 4896 km con un litro de combustible.

La próxima prueba se celebrará en Mayo de 2011 en el circuito automovilístico de Eurospeedway de Lausitz en Alemania.

### 2.1 Normativa

La normativa de la competición influye de forma determinante en el diseño del vehículo. Se trata de un conjunto de normas que pretenden, en primer lugar, asegurar la integridad de los pilotos, y en segundo, dar unas reglas básicas de diseño, que equiparen las posibilidades de todos los equipos, y eviten posibles situaciones de desigualdad [3].

Puesto que la dirección de la competición entrega las normas en forma de artículos, y para facilitar la posible consulta en la normativa oficial, a continuación se muestran los artículos, o parte de artículos, que afectan a este proyecto.

#### **Artículo 21: Peso del piloto**

Los pilotos de coches prototipo deben pesar por lo menos 50 kg completamente equipados incluyendo los dispositivos de comunicación.

## **Artículo 25: Diseño del vehículo**

Durante el diseño, la construcción y el planteamiento de la carrera, los equipos participantes, deben prestar especial atención a la seguridad, y más particularmente a la del piloto, de los otros competidores, y de los espectadores.

Los vehículos deben tener tres o cuatro ruedas, que en condiciones de funcionamiento normal, deben permanecer todas en contacto con el asfalto.

Están prohibidos todos los elementos aerodinámicos móviles. Los accesorios aerodinámicos, que se adaptan o son móviles, es decir, su forma cambia debido al viento cuando el vehículo está en el movimiento, están prohibidos.

El bloque de los vehículos, no debe tener ningún elemento externo afilado, que pueda ser peligroso para otros participantes, ni ningún objeto cortante que pueda dañar al piloto en caso de impacto.

## **Artículo 26: Dimensiones**

La altura máxima debe ser menor de 100cm.

La máxima altura, medida en la parte superior del habitáculo, debe ser menor que 1,25 veces el máximo ancho de vía del vehículo, medido entre las dos ruedas con mayor ancho de vía.

El ancho de vía mínimo debe ser de 50cm, medido entre los centros de la huella de los neumáticos, y el máximo ancho de 110cm. La distancia entre ejes, debe ser de al menos 100cm.

El ancho total máximo del vehículo debe ser de 130 cm, y el largo máximo debe ser de 350cm, mientras que el peso máximo del vehículo, sin conductor, debe ser de 140 kg. Estas medidas, se dan para asegurar la suficiente estabilidad del vehículo, dado el trazado del circuito.

## **Artículo 36: Embrague y transmisión**

Los vehículos deben estar equipados con un sistema de embrague que le permita ser inmovilizado en la línea de meta, sin ninguna asistencia externa.

### **Artículo 38: Radio de giro**

El radio de giro debe permitir un adelantamiento seguro. Si los comisarios observan que el radio de giro de un vehículo es insuficiente, el vehículo podrá ser retirado de la carrera para ser inspeccionado.

## **2.2 Tipos de fuentes de energía**

Existen diversas fuentes de energía dentro de la competición. Todas las fuentes de energía están patrocinadas por los promotores de la carrera (SHELL) y se pueden distinguir 2 categorías, motores de combustión interna y motores eléctricos.

### **2.2.1 Motores de combustión interna**

#### **2.2.1.1 Shell FuelSave Unleaded 95**

Este combustible es la gasolina sin plomo 95. Es el más utilizado gracias a que es de fácil adquisición, aunque la organización se encarga de suministrar el combustible durante el desarrollo de la competición, y la mayoría de los motores son de dimensiones reducidas.

#### **2.2.1.2 Shell FuelSave Diesel**

En la competición este tipo de combustible diésel no es el más usado, sin embargo, se logran colocar entre las primeras posiciones en la clasificación final.

#### **2.2.1.3 Etanol E100 (100% Etanol)**

También se denomina alcohol etílico. Se presenta en estado líquido e incoloro y procede de la destilación de una fermentación anaeróbica de una disolución rica en azúcares. Aunque la eficiencia energética es menor que en combustibles anteriores los vehículos que llevan este combustible obtienen buenos resultados en la clasificación final de la competición.

#### **2.2.1.4 Shell Gas to Liquid (100 % GTL)**

Esta tecnología involucra la transformación del gas natural (principalmente metano) por medio de una serie de procesos catalíticos para la obtención de combustibles con

cero contenido de contaminantes como: diésel, nafta, lubricantes, ceras, parafinas, y gas licuado de petróleo. Debido a la naturaleza sintética de este combustible es posible eliminar totalmente el contenido de contaminantes.

#### **2.2.1.5 Fatty Acid Methyl Ester (100% FAME)**

Es el futuro de los carburantes, es el llamado Biodiésel. Se crea a partir de los ácidos grasos procedentes de aceites usados, grasas vegetales y/o animales y desechos.

Su uso en la competición se ha incrementado anualmente llegando a sobrepasar los 1.000 kilómetros por litro de combustible.

### **2.2.2 Motores eléctricos**

#### **2.2.2.1 Hidrógeno**

Este tipo de energía se fundamenta en la conversión de pila de combustible. El hidrógeno se convierte en electricidad a través de pilas de combustible que mueven motores eléctricos. La pila de combustible es una de las energías alternativas más comentada en los últimos años y ha provocado el interés de los fabricantes de vehículos ya que sus emisiones no son nada más que agua. Son numerosos los equipos que emplean este tipo de tecnología.

#### **2.2.2.2 Energía Solar**

La energía procedente del sol es una fuente inagotable de energía que no produce contaminantes y que además, a diferencia del petróleo, no crea dependencia de otros países.

Pocos vehículos han optado por esta categoría, de hecho en edición del 2007 de la Shell Eco-marathon no se inscribió ningún equipo con este tipo de energía.

#### **2.2.2.3 'Plug in' electricity**

Se trata de vehículos propulsados por energía eléctrica almacenada en baterías. Es una categoría nueva introducida para el año 2011. Esta energía ya se encuentra en vehículos comerciales, el funcionamiento es similar al de vehículos híbridos a

diferencia de que estos vehículos llevan una toma para poder recargar las baterías con una fuente externa.

### 2.3 Tipos de vehículos

En la competición Shell Eco-Marathon pueden participar dos tipos de vehículos, los Prototipos (Figura 1) y los “Urban concept” (Figura 2). Los primeros están destinados a promover la innovación tecnológica teniendo poca o ninguna similitud con vehículos de calle. En cambio el grupo “Urban concept” pretende asemejarse en tecnología y aspecto a vehículos de calle. Ambos tipos de vehículos pueden estar propulsados por motores de combustión interna, por hidrógeno, por energía solar o energía eléctrica.

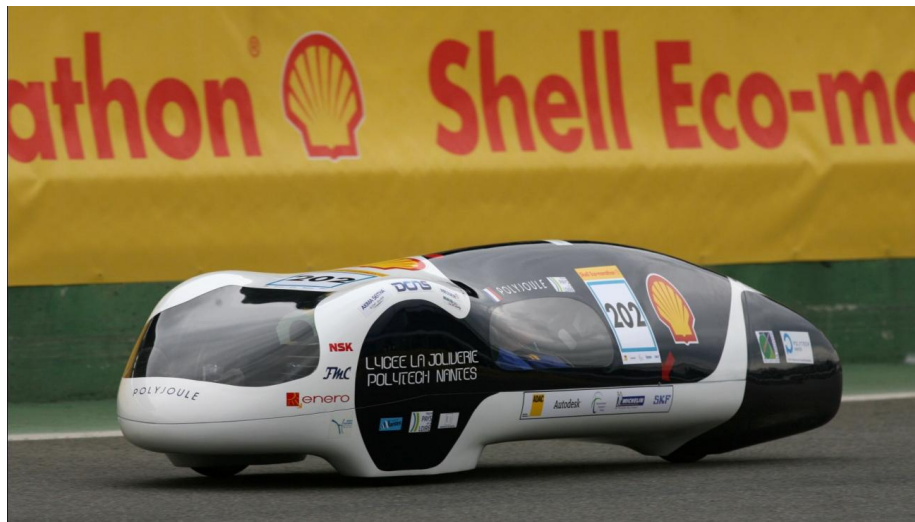


Figura 1: Prototipo [9]



Figura 2: Urban concept [9]

### 3 Dinámica vehicular

En este capítulo se deducen las expresiones de la dinámica longitudinal y lateral para un vehículo cualquiera en movimiento.

#### 3.1 Dinámica longitudinal

El análisis del comportamiento del vehículo cuando circula en línea recta se define como dinámica longitudinal, considerando nulas las acciones que producen asimetrías respecto al plano longitudinal del vehículo. Para el estudio de los esfuerzos longitudinales puede utilizarse un modelo plano como el de la Figura 3, en el cual se ignorarán, además, los movimientos verticales y de cabeceo de la masa suspendida, donde en esta figura:

- $F_d$  y  $F_t$  representan los esfuerzos de tracción en los ejes delantero y trasero, respectivamente.
- $F_{zd}$  y  $F_{zt}$  son las reacciones normales a la superficie de rodadura, en los ejes delantero y trasero.
- $F_{za}$  es la fuerza de sustentación aerodinámica.
- $M_{ya}$  es el momento aerodinámico de cabeceo.
- $d_d$  y  $d_t$  son los avances de neumático. Originan sendos pares de resistencia a la rodadura en ambos ejes.
- $l_1$  y  $l_2$  representan las distancias entre el centro de gravedad y cada uno de los ejes en su proyección sobre el plano de rodadura.
- $L$  es la distancia entre ejes o batalla.
- $h$  es la altura al centro de gravedad del vehículo.
- $V_x$ ,  $a_x$ , velocidad y aceleración longitudinales del centro de gravedad.
- $\Omega_d$ ,  $\Omega_t$ , velocidades de giro de las ruedas.

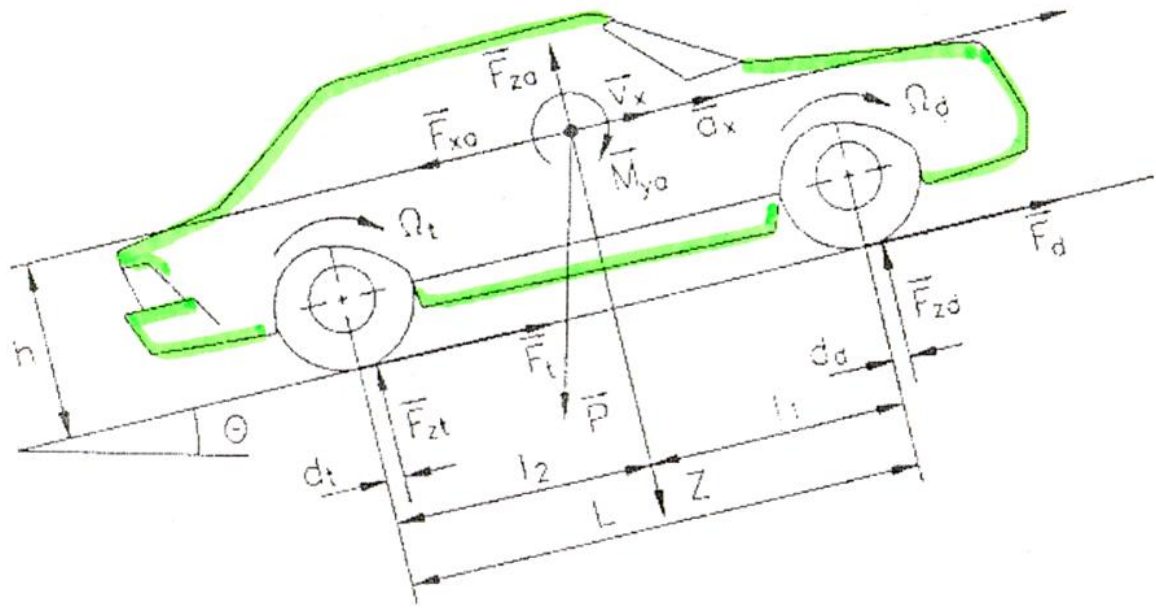


Figura 3: Modelo plano para el estudio de la dinámica longitudinal [4]

A continuación se deduce la expresión que relaciona el esfuerzo tractor máximo con las coordenadas del centro de gravedad del vehículo automóvil, y el resto de los parámetros significativos.

Considerando el modelo de la Figura 3 se determina el valor máximo que pueden alcanzar los esfuerzos tractores  $F_t$  y  $F_d$ , como consecuencia del límite que impone el rozamiento entre el neumático y la calzada, cuyo valor es representado por el coeficiente de máxima adherencia  $\mu$ . Calculando los momentos de las fuerzas respecto al punto de contacto de la rueda trasera con el suelo se obtiene:

$$\left( \frac{P}{g} \cdot a + F_{xo} + P \cdot \sin \theta \right) \cdot h - (P \cdot \cos \theta - F_{zo}) \cdot l_2 + F_{zd} \cdot L - M_{ya} = 0$$

De donde se obtiene  $F_{zd}$ :

$$F_{zd} = \frac{P \cdot \cos \theta \cdot l_2 - \left( \frac{P}{g} \cdot a + F_{xo} + P \cdot \sin \theta \right) \cdot h - F_{zo} \cdot l_2 + M_{ya}}{L}$$

Ec. 1

Suponiendo que el ángulo  $\theta$  es pequeño y que las acciones aerodinámicas de sustentación y cabeceo son pequeñas frente al resto de los esfuerzos, la anterior ecuación, puede simplificarse, resultando:

$$F_{zt} = \frac{l_1}{L} \cdot P + \frac{h}{L} \cdot \left( \frac{P}{g} \cdot a + P \cdot \sin \theta + F_{xa} \right)$$

Ec. 2

El sumando  $\frac{l_1}{L} \cdot P$  representa la carga estática sobre las ruedas del eje trasero, cuando el vehículo se encuentra sobre una superficie horizontal.

El valor  $\frac{h}{L} \cdot \left( \frac{P}{g} \cdot a + P \cdot \sin \theta + F_{xa} \right)$  representa la transferencia de carga entre el eje delantero y el trasero, debido al conjunto de las resistencias y a la inercia del vehículo.

Con estos valores se calcula el límite impuesto por el rozamiento a la tracción del vehículo:

$$F_{Ttmax} = \mu \cdot F_{zt} = \mu \cdot \left[ \frac{l_1}{L} \cdot P + \frac{h}{L} \cdot \left( \frac{P}{g} \cdot a + P \cdot \sin \theta + F_{xa} \right) \right]$$

Ec. 3

La Ec. 3 se puede escribir de otra forma considerando las fuerzas favorables al movimiento y las fuerzas de resistencia:

$$F_{Ttmax} = \mu \cdot F_{zt} = \mu \cdot \left[ \frac{l_1}{L} \cdot P + \frac{h}{L} \cdot (F_{Ttmax} - R_r) \right]$$

Ec. 4

Donde:

- $R_r$ : son las fuerzas que se oponen al movimiento.

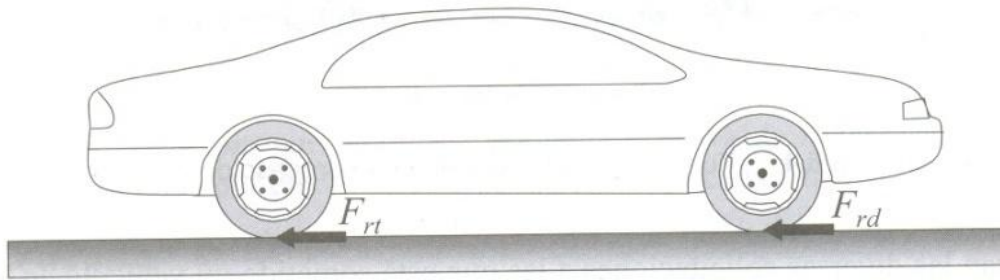
### 3.1.1 Fuerzas de resistencia en el movimiento de avance del vehículo

El movimiento de un vehículo se ve afectado por dos fuerzas de resistencia que se deben vencer para que el vehículo pueda desplazarse, éstas son la resistencia por rodadura y la resistencia aerodinámica.



### 3.1.1.1 Resistencia por rodadura

Se tendrán en cuenta las resistencias al avance debidas a las pérdidas por rodadura del vehículo, como suma de las fuerzas que se generan en cada neumático a consecuencias de su rodadura y que se oponen al avance del mismo. Estas pérdidas se estudian en la teoría de la interacción entre neumático y calzada (Figura 4).



**Figura 4: Fuerzas de resistencia a la rodadura en ambos ejes del vehículo [4]**

A pesar de ello, conviene enunciar que son debidas a factores diversos, tanto propios del neumático como propios de la superficie de contacto o de las condiciones operativas. Por ello, no es sencillo obtener una expresión matemática que cuantifique el valor de dicha resistencia, considerándose, para el análisis de la dinámica de los vehículos, la expresión siguiente:

$$F_r = f_r \cdot F_z$$

Donde:

- $f_r$  es el coeficiente de resistencia a la rodadura.
- $F_z$  es la fuerza de reacción vertical del suelo en el neumático.

La resistencia al avance del vehículo completo es la suma de la resistencia debida a las cuatro ruedas o, en este caso en que se utilizan modelos planos, la suma de la resistencia de ambos ejes, esto es:

$$F_r = F_{rd} + F_{rt} = f_r \cdot m \cdot g$$

El coeficiente de resistencia a la rodadura  $f_r$  se puede aproximar como:

$$f_r = c_1 + c_2 \cdot V^2$$

Ec. 6

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos coeficientes constantes que varían para un tipo de vehículo y neumático.

### 3.1.1.2 Resistencia aerodinámica

La resistencia al avance debida a la aerodinámica (Figura 5) tiene un efecto importante sobre el comportamiento dinámico de los vehículos cuando se circula a velocidades elevadas, siendo prácticamente despreciable a velocidades bajas.

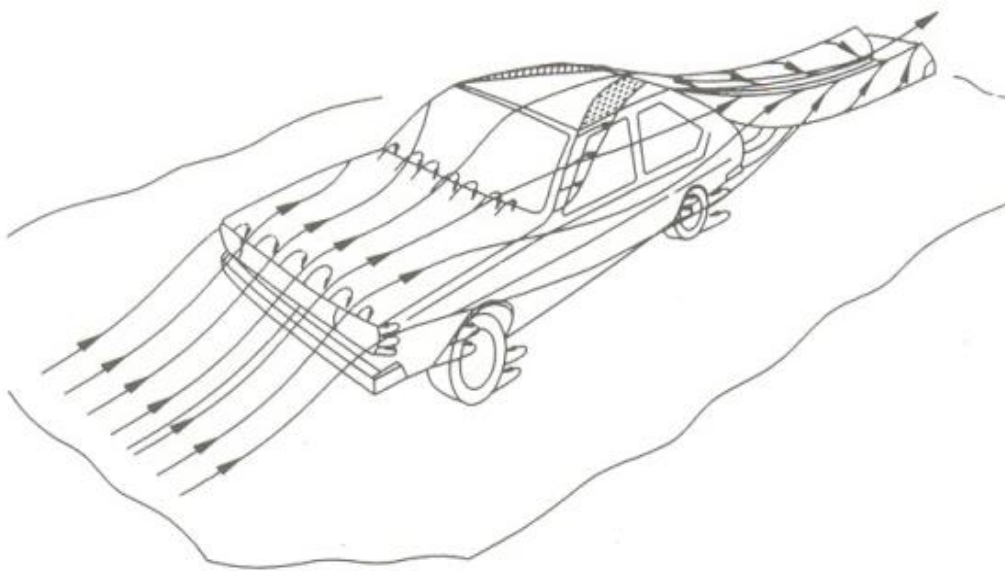


Figura 5: Isolíneas de presión sobre la superficie de la carrocería de un vehículo [4]

Esta fuerza de resistencia es función de diversos factores que se pueden englobar en:

- Características del vehículo: forma y área frontal.
- Factores del medio: densidad del aire.
- Factores operativos: velocidad de circulación.

La expresión para cuantificar la fuerza de resistencia aerodinámica del vehículo es la siguiente:

$$F_{xa} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot A_f \cdot V^2$$

Ec. 7

Donde:

- $\rho$  es la densidad del aire.
- $C_x$  es el coeficiente aerodinámico del vehículo, dependiente de su geometría.
- $A_f$  es el área frontal del vehículo.
- $V$  es la velocidad de circulación.

Para un mismo vehículo su resistencia al avance aumenta significativamente con la velocidad de circulación, pudiendo considerarse despreciable a bajas velocidades (Figura 6) [2].

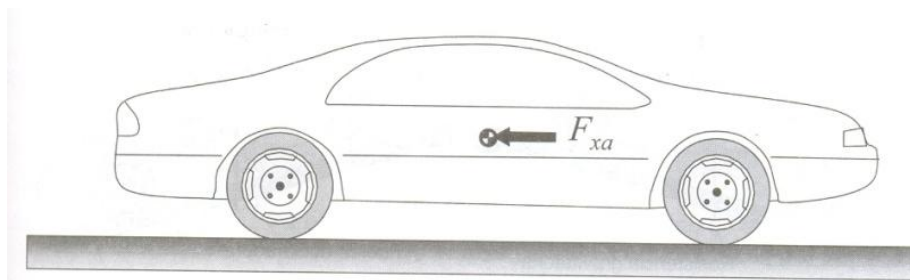


Figura 6: Posición en la que se considera aplicada la fuerza aerodinámica [4]

### 3.2 Dinámica lateral

Cuando un vehículo describe una trayectoria curva, la fuerza centrífuga, actuando sobre su centro de gravedad a una altura  $h$  desde la superficie de rodadura, origina un esfuerzo lateral, que debe ser compensado por las fuerzas de adherencia entre los neumáticos y el suelo y por un momento de vuelco. Al aumentar la velocidad, se incrementan ambos efectos por lo que el vehículo puede perder su trayectoria si la adherencia transversal es sobrepasada, o volcar, cuando la velocidad alcance ciertos valores límite.

Para obtener una primera aproximación se puede considerar que la suspensión es rígida o, lo que es lo mismo, que el desplazamiento del centro de gravedad, como

consecuencia de la flexibilidad de la suspensión, ejerce una influencia despreciable. Primeramente se estudia la teoría aplicada a un vehículo de 4 ruedas. Así mismo, se supone que la calzada, en la curva, dispone de un peralte expresado por su ángulo de inclinación ( $\zeta$ ) respecto de la horizontal como se puede observar en la Figura 7.

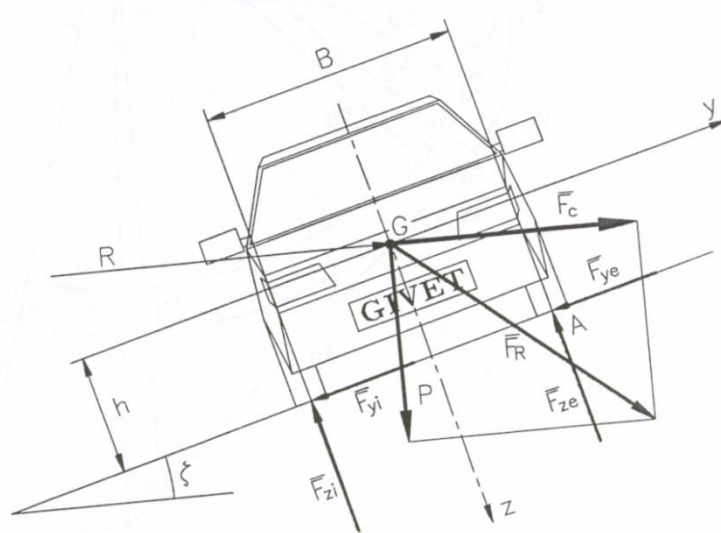


Figura 7: Modelo bidimensional para el cálculo aproximado de las velocidades límite de derrape y de vuelco [4]

### 3.2.1 Cálculo aproximado de la velocidad límite de derrape

Una situación límite en la circulación en curva de un vehículo se produce cuando las fuerzas laterales ( $F_c$ ) superen la capacidad de reacción por fuerzas de adherencia ( $F_{yi}$  y  $F_{ye}$ ) y se produzca el derrape. Para evaluar las condiciones límite de circulación por una curva, de peralte  $\zeta$ , se plantean las ecuaciones de equilibrio en las direcciones transversal y vertical para un vehículo de 4 ruedas:

$$\begin{aligned} F_{zi} + F_{ze} &= P \cdot \cos \zeta + F_c \cdot \sin \zeta \\ F_{yi} + F_{ye} &= -P \cdot \sin \zeta + F_c \cdot \cos \zeta \end{aligned}$$

Ec. 8

Donde:

- $F_{zi}$  es la resultante perpendicular al suelo de todas las fuerzas sobre las ruedas interiores.
- $F_{ze}$  es la resultante perpendicular al suelo de todas las fuerzas sobre las ruedas exteriores.

- $F_{yi}$  es la resultante paralela al suelo de todas las fuerzas sobre las ruedas interiores.
- $F_{ye}$  es la resultante paralela al suelo de todas las fuerzas sobre las ruedas exteriores.
- $P$  es el peso del vehículo.
- $F_c$  es la fuerza centrífuga.
- $\zeta$  es el peralte de la curva.

Suponiendo que la adherencia es igual en los neumáticos interiores y en los exteriores, se tiene:

$$(F_{zi} + F_{ze}) \cdot \mu_y = F_{ye} + F_{yi}$$

**Ec. 9**

Donde:

- $\mu_y$  es el coeficiente de máxima adherencia.

Sustituyendo Ec. 8 en la Ec. 9:

$$(P \cdot \cos \zeta + F_c \cdot \sin \zeta) \cdot \mu_y = -P \cdot \sin \zeta + F_c \cdot \cos \zeta$$

**Ec. 10**

Por otro lado y teniendo en cuenta que la aceleración centrífuga es:

$$F_c = \frac{P \cdot V^2}{g \cdot R}$$

**Ec. 11**

Donde:

- $V$  es la velocidad del vehículo.
- $g$  es la aceleración de la gravedad.
- $R$  es el radio de la curva.

Sustituyendo la Ec. 11 en la Ec. 10, y despejando  $V$ , resulta:

$$V_{ld} = \sqrt{g \cdot R \cdot \frac{\mu_y + \tan \zeta}{1 - \mu_y \cdot \tan \zeta}}$$

**Ec. 12**

### 3.2.2 Cálculo aproximado de la velocidad límite de vuelco

La situación límite en la circulación en curva de un vehículo en la que este vuelca se define como velocidad límite de vuelco y se da cuando el momento debido a la fuerza de reacción centrípeta supera a los momentos debido a las fuerzas de adherencia en la superficie de las ruedas.

Geométricamente, la condición límite de vuelco puede obtenerse cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre el centro de gravedad del vehículo corta a la superficie de rodadura en el punto exterior de la huella de contacto del neumático exterior (considerando el diagrama plano de la Figura 7, punto A).

Puesto que, en un vehículo de 4 ruedas:

$$\begin{aligned}F_y &= F_c \cdot \cos \zeta - P \cdot \sin \zeta \\F_z &= P \cdot \cos \zeta + F_c \cdot \sin \zeta\end{aligned}$$

La condición de vuelco puede formularse como:

$$\sum M_A = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{F_y}{F_z} &= \frac{F_c \cdot \cos \zeta - P \cdot \sin \zeta}{P \cdot \cos \zeta + F_c \cdot \sin \zeta} = \frac{B}{2 \cdot h} \\ F_z \cdot \frac{B}{2} &= F_y \cdot h \end{aligned} \right.$$

Ec. 13

Sustituyendo la Ec. 11 en la Ec. 13, y despejando V, resulta:

$$V_{lv} = \sqrt{g \cdot R \cdot \frac{\frac{B}{2 \cdot h} + \tan \zeta}{1 - \frac{B}{2 \cdot h} \cdot \tan \zeta}}$$

Ec. 14

Tanto en la expresión de la velocidad límite de derrape (Ec. 12) como en la de la velocidad límite de vuelco (Ec. 14) para vehículos de 4 ruedas se aprecia claramente que estos parámetros aumentan si se disminuye la distancia del suelo al centro de gravedad del vehículo.

Cuando la altura del centro de gravedad (c.d.g.) al suelo es sensiblemente menor, las prestaciones en dinámica longitudinal mejoran, ya que la transferencia de carga de la

rueda exterior a la interior del vehículo disminuye y esto permite tomar las curvas con una sensación mayor de seguridad.

### 3.2.3 Estabilidad en un vehículo Shell Eco-marathon

El caso particular del vehículo prototipo de la Universidad Carlos III de Madrid difiere con respecto a los modelos estudiados anteriormente de 4 ruedas. El vehículo para la competición Shell Eco-marathon consta de 3 ruedas siendo la rueda trasera la tractora y directriz. Por ello es necesario particularizar las situaciones de vuelco para el prototipo y compararlas con las ecuaciones genéricas de la teoría de vehículos.

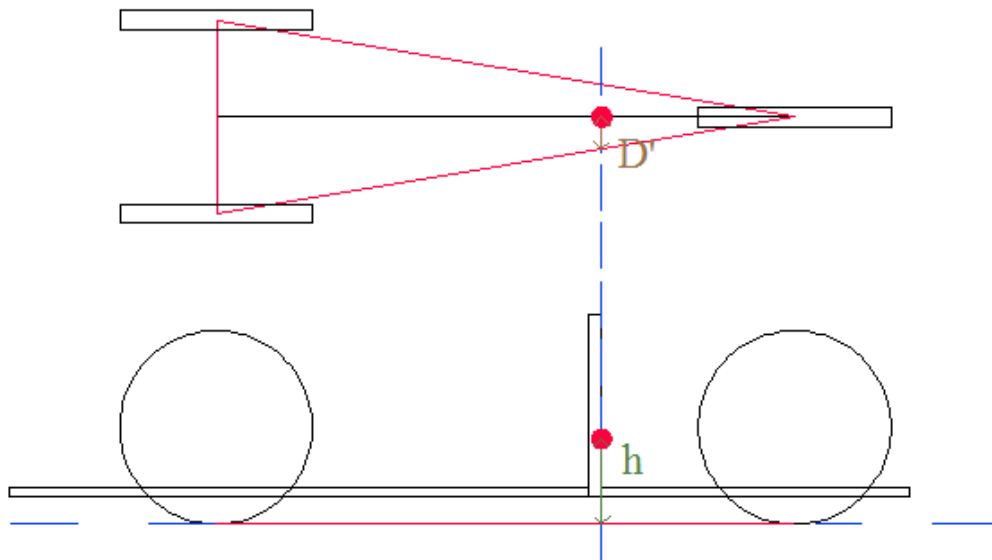


Figura 8: Triángulo de estabilidad para un vehículo de tres ruedas

La diferencia de la Figura 8 con respecto a la Figura 7 es que no se puede tomar el ancho del vehículo sino el ancho del triángulo de estabilidad a la altura de la posición del centro de gravedad, de esta manera el equilibrio de momentos queda:

$$F_z \cdot D' = F_y \cdot h$$

Donde:

- $D'$  es el ancho del triángulo de estabilidad a la altura del c.d.g (equivalente a  $B/2$ ).

De la Figura 8 se puede deducir que cuando más adelantado esté el centro de gravedad del vehículo mayor es la velocidad límite de vuelco. Se trata pues de diseñar el coche de manera que el reparto de masas quede lo más adelantado posible, para así contrarrestar los posibles momentos de vuelco.



## 4 Ecuaciones de Lagrange

Para describir el comportamiento cinemático de un sistema resulta muy útil y práctico emplear las ecuaciones que desarrolló Joseph Louis Lagrange en 1788 y más cuando el movimiento del sistema está restringido a un cierto camino [6].

### 4.1 Principio de D'Alembert

Se entiende por desplazamiento virtual de un sistema a la variación arbitraria de sus coordenadas  $\delta r_i$ , compatible con las fuerzas y ligaduras que el sistema tiene en un instante de tiempo de tiempo  $t$  (Figura 9). Se supone que inicialmente el sistema está en equilibrio, es decir, que la resultante de todas las fuerzas que se aplican sobre cada partícula del sistema es cero, de aquí se deduce, por lo tanto, que el trabajo virtual de cada partícula es cero, es decir, el producto escalar  $F_i \cdot \delta r_i$  es nulo. Ahora el sistema entero es:

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = 0$$

Ec. 15

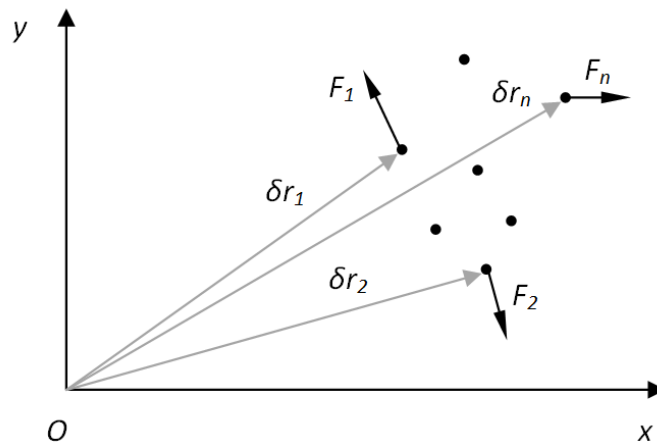


Figura 9: Coordenadas y fuerzas de un sistema de partículas

Descomponiendo  $F_i$  en la fuerza aplicada  $F_i^{(a)}$  y la fuerza de ligadura  $f_i$ ,

$$F_i = F_i^{(a)} + f_i$$

Ec. 16

Teniendo en cuenta la Ec. 16, la Ec. 15 queda:

$$\sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta r_i + \sum_i f_i \cdot \delta r_i = 0$$

Ec. 17

En el caso en el que una partícula se mueve sobre una superficie, la fuerza de ligadura es perpendicular a dicha superficie por lo tanto el trabajo virtual es nulo. Esto no es cierto cuando hay fuerzas de rozamiento por lo que se excluye de esta formulación de sistemas de partículas, el rozamiento se trata de un fenómeno macroscópico que se aplica en un punto en reposo instantáneo y no pueden trabajar en un desplazamiento infinitesimal compatible con la ligadura de rozamiento.

Se tiene pues que un sistema está en equilibrio cuando el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas es nulo:

$$\sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta r_i = 0$$

Ec. 18

Mencionar que puesto que, en general,  $F_i^{(a)} \neq 0$  los coeficientes  $\delta r_i$  no son totalmente independientes sino que están relacionados por las ligaduras. La Ec. 18 sólo es válida para la estática, se necesita una condición que tenga en cuenta el movimiento general del sistema. La ecuación del movimiento:

$$F_i = \dot{p}_i$$

se puede escribir en la forma:

$$F_i - \dot{p}_i = 0$$

Esto expresa que las partículas del sistema están en equilibrio bajo una fuerza igual a la real más una fuerza efectiva invertida  $-\dot{p}_i$ . La Ec. 15 se puede escribir por tanto:

$$\sum_i (F_i - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0$$

Ec. 19

Haciendo la descomposición de fuerzas aplicadas y fuerzas de ligadura queda:

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i + \sum_i f_i \cdot \delta r_i = 0$$

En el caso de sistemas en el que las fuerzas de ligadura hacen trabajo nulo:

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0$$

**Ec. 20**

La Ec. 20 constituye el principio de D'Alembert.

## 4.2 Obtención de las Ecuaciones de Lagrange a través del principio de D'Alembert

Una vez obtenido el principio de D'Alembert en la sección 4.1, hay que transformarlo en una expresión que contenga los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas, las cuales son independientes entre sí.

La posición de las partículas se puede expresar, por medio de las ecuaciones de transformación, como:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Donde las  $q_i$  son las coordenadas generalizadas y  $t$  el tiempo. Suponiendo que las  $n$  coordenadas son independientes entre sí, aplicando la regla de la cadena del cálculo de derivadas parciales la velocidad se puede calcular como:

$$v_i \equiv \frac{dr_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

**Ec. 21**

El desplazamiento virtual de  $\delta r_i$  se relaciona con los desplazamientos virtuales de  $\delta q_i$  mediante:

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

**Ec. 22**

El trabajo virtual queda por tanto:

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i,j} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \cdot \delta q_j$$

**Ec. 23**

Donde  $Q_j$  son las componentes de la fuerza generalizada:

$$Q_j = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

**Ec. 24**

A modo aclaratorio, las  $Q$  y  $q$  no tiene por qué tener dimensiones de fuerza y longitud respectivamente pero el producto de ambas debe tener necesariamente dimensiones de trabajo.

El otro término de la Ec. 20 puede escribirse como:

$$\sum_i \dot{p}_i \cdot \delta r_i = \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i$$

Y con la Ec. 22 queda:

$$\sum_i \dot{p}_i \cdot \delta r_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Teniendo en cuenta la relación:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j$$

**Ec. 25**

En el último término de la Ec. 25 se pueden permutar las derivadas respecto a  $t$  y  $q_j$  y con la Ec. 21 resulta:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial v_i}{\partial q_j}$$

En la Ec. 21 se observa que:

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

**Ec. 26**

Sustituyendo estos cambios en la Ec. 25 queda:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i v_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right\}$$

El segundo término de la Ec. 20 se puede desarrollar dando:

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j$$

Identificando la energía cinética T del sistema el principio de D'Alembert queda:

$$\sum_j \left[ \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

**Ec. 27**

Hasta aquí la única restricción que se ha impuesto a la naturaleza de las ligaduras es que deben hacer un trabajo nulo en todo el desplazamiento virtual. Si las ligaduras son holónomas se puede obtener un sistema de coordenadas independiente por lo que la única forma de que se cumpla la Ec. 27 es que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

**Ec. 28**

La Ec. 28 se suele llamar ecuación de Lagrange y en total hay n ecuaciones.

Cuando las fuerzas derivan de un potencial escalar V:

$$F_i = -\nabla_i V$$

Las fuerzas generalizadas (Ec. 24) se pueden escribir como:

$$Q_j = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

Cuya forma coincide con la expresión de derivada parcial de  $-V$  con respecto a  $q_j$ :

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

**Ec. 29**

Teniendo en cuenta la Ec. 29, la Ec. 28 se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

**Ec. 30**

Como V no depende de las velocidades generalizadas se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

Definiendo una nueva función lagrangiana L:

$$L = T - V$$

**Ec. 31**

La Ec. 28 queda por tanto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

**Ec. 32**

La Ec. 32 se conoce con el nombre de Ecuaciones de Lagrange.

En el caso de que las fuerzas generalizadas tengan una parte conservativa y otra no conservativa  $Q_j^{NC}$ ,  $Q_j$  es:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

**Ec. 33**

Introduciendo la Ec. 33 en la Ec. 28 las ecuaciones de Lagrange quedan:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

**Ec. 34**

De esta manera se obtienen las ecuaciones de Lagrange en el caso de fuerzas conservativas y no conservativas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC}$$

**Ec. 35**

### 4.3 Principio de Hamilton

La deducción de las ecuaciones de Lagrange en el capítulo anterior partía de considerar el estado instantáneo del sistema y pequeños desplazamientos virtuales respecto al estado instantáneo, las ecuaciones también pueden obtenerse a través de un principio que considere el movimiento del sistema entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  (Figura 10) y pequeñas variaciones virtuales del movimiento entero respecto del movimiento virtual (principio integral).

Las  $n$  coordenadas generalizadas describen la configuración instantánea del sistema, estas coordenadas corresponden a un punto particular en el espacio de  $n$  dimensiones, conocido como espacio de las configuraciones. A medida que va pasando el tiempo, el estado del sistema va cambiando y el punto representativo del sistema va

describiendo una trayectoria llamada “camino del movimiento del sistema”. Cada punto del camino tiene asociado uno o más valores de tiempo. El espacio de las configuraciones no tiene por qué tener relación alguna con el espacio físico tridimensional, del mismo modo que las coordenadas generalizadas no tienen necesariamente que indicar la posición. De igual modo el camino del movimiento no tiene por qué tener ninguna semejanza con el camino que realiza la partícula real en el espacio.

El principio de Hamilton es un principio integral que describe el movimiento de un sistema en el cual todas las fuerzas, excepto las de ligadura, pueden derivar de un potencial escalar generalizado, función de las coordenadas, velocidad y tiempo. El principio de Hamilton dice que el movimiento del sistema entre el tiempo  $t_1$  y  $t_2$  es tal que la integral curvilínea del Lagrangiano tiene un valor estacionario para el camino del movimiento correcto (ver Figura 10):

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

**Ec. 36**

Esto quiere decir que el sistema se moverá, entre todos los caminos posibles, por un recorrido por el cual el valor de la integral sea estacionario (estacionario quiere decir que a lo largo del camino la integral adquiere el mismo valor), por lo tanto su variación es nula:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0$$

**Ec. 37**



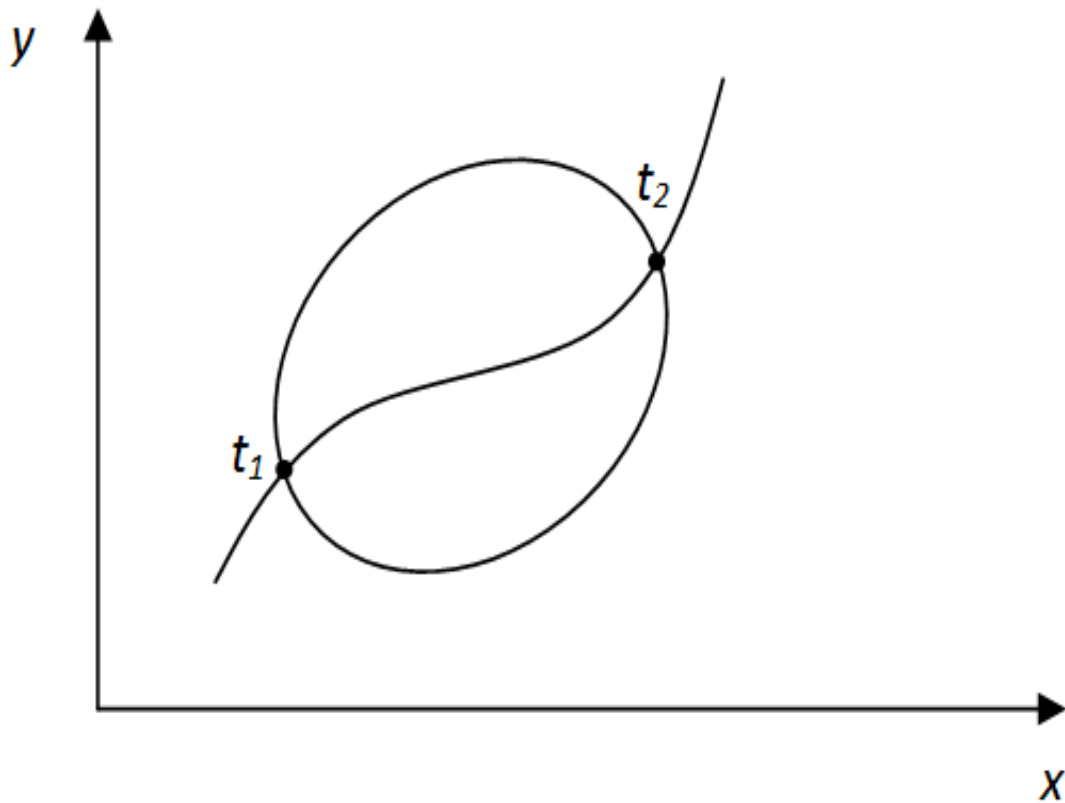


Figura 10: Camino del punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones

#### 4.4 Deducción de las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton

Aunque en la sección 4.3 se ha deducido el principio de Hamilton a través de las ecuaciones de Lagrange, se va a hacer el proceso contrario, deducción de las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton, considerando éste como condición suficiente para deducir las ecuaciones del movimiento.

Considérese la variación de una integral  $J$  como:

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x), \dots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \dots, \dot{y}_n(x), x) dx$$

Ec. 38

Considerando  $J$  como función de un parámetro  $\alpha$  que muestra un conjunto posible de curvas  $y_i(x, \alpha)$ , de este modo se puede introducir  $\alpha$  haciendo:

$$\begin{aligned} y_1(x, \alpha) &= y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x) \\ y_2(x, \alpha) &= y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ec. 39

Donde  $y_1(x, 0)$ ,  $y_2(x, 0)$ , etc. son las soluciones del problema de extremo y las funciones  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ , etc. son función de  $x$  que se anulan en los extremos. La variación de  $J$  queda:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx$$

Ec. 40

Integrando por partes la Ec. 40:

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx$$

Ec. 41

El primer término se anula porque todas las curvas pasan por los puntos extremos fijos, de esta forma  $\delta J$  queda:

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx$$

Ec. 42

La variación  $\delta y$  es:

$$\delta y_i = \left( \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha$$

Ec. 43

Ya que las variables  $y$  son independientes, sus variaciones también lo serán. La condición de que  $\delta J$  sea cero exige que los coeficientes de las  $\delta y_i$  se anulen:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ec. 44

La Ec. 44 se conoce con el nombre de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange. Las soluciones con curvas para las cuales toda variación de una integral de la forma de la Ec. 38 se anula. La integral del principio de Hamilton es:

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

Ec. 45

Esta integral tiene la forma descrita por la Ec. 38 con las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i &\rightarrow q_i \\ f(y_i, \dot{y}_i, x) &\rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t) \end{aligned}$$

Al deducir la Ec. 44 se supuso que las variables  $y_i$  eran independientes, la condición correspondiente para el principio de Hamilton es que las coordenadas generalizadas  $q_i$  sean independientes también, lo que obliga a que las ligaduras sean holónomas. De este modo las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la integral  $I$  se convierten en las ecuaciones de Lagrange del movimiento:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ec. 46

## 4.5 Restricciones en el movimiento

Hasta ahora se han tratado las ecuaciones de Lagrange para casos en los que no se han impuesto condiciones algunas en el movimiento del sistema. En la mayoría de los casos existen ligaduras que hacen que el sistema no pueda tomar cualquier estado sino que una vez definida una coordenada hay otra u otras que toman un determinado valor. En el caso de que las ligaduras relacionen coordenadas, y tal vez el tiempo, se llaman ligaduras geométricas y si relacionan velocidades, y tal vez el tiempo, se llaman ligaduras cinemáticas. En el caso que se estudia en este documento tan solo existen ligaduras geométricas por lo que las ligaduras cinemáticas no se consideran.

Las ligaduras geométricas se pueden expresar como una función que relaciona las coordenadas generalizadas y tal vez el tiempo:

$$f_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

**Ec. 47**

Donde  $m$  indica el número de ligaduras que existen en el problema.

En el proceso de deducción de las ecuaciones de Lagrange no se considera que se trata de un sistema holónomo hasta los últimos pasos cuando se consideran las variaciones de las  $q_j$  independientes entre sí. Para sistemas no holónomos, las coordenadas generalizadas ya no son independientes y sólo es posible reducirlas por medio de ecuaciones de ligadura de la forma de la Ec. 47. Cuando las coordenadas no son independientes es importante conocer si el camino está constituido por desplazamientos virtuales compatibles con las ecuaciones de ligadura.

Se puede definir un vector  $a_l$  por cada ecuación de ligadura cuyas componentes son:

$$a_{lk} = \frac{\partial f_l}{\partial q_k}$$

**Ec. 48**

Es posible conseguir un principio variacional que conduce a las ecuaciones del movimiento correctas cuando se construyen diferentes caminos a partir del movimiento real mediante desplazamientos virtuales. Las ecuaciones de ligadura aptas para los desplazamientos virtuales son:

$$\sum_k a_{lk} \cdot \delta q_k = 0$$

**Ec. 49**

Se puede emplear la Ec. 49 para reducir en número de desplazamientos virtuales a los independientes, cuando dos vectores son independientes cualquier combinación lineal de ellos es cero:

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \cdot \delta q_k = 0$$

**Ec. 50**

Donde los  $\lambda_l$  son cantidades indeterminadas que se conocen con el nombre de *multiplicadores de Lagrange*.

El principio de Hamilton se supone válido para sistemas no holónomos:

$$\int_1^2 dt \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k = 0$$

Ec. 51

Se puede combinar la Ec. 51 con las  $g$  ecuaciones de ligadura sobre los desplazamientos virtuales  $\delta q_k$  sumando la Ec. 50 para los valores de  $l$  e integrando respecto del tiempo:

$$\int_1^2 \left( \sum_{k,l} \lambda_l \cdot a_{lk} \cdot \delta q_k \right) dt = 0$$

Ec. 52

Sumando la Ec. 51 y Ec. 52:

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_l \lambda_l \cdot a_{lk} \right) \delta q_k = 0$$

Ec. 53

Las  $\delta q_k$  están ligadas por las  $m$  ligaduras, mientras se puedan elegir independientemente  $n-m$  primeras de ellas, las  $m$  últimas quedan definidas por la Ec. 47. Si se eligen unos  $\lambda_l$  que hagan que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_l \lambda_l \cdot a_{lk} = 0, \quad k = n - m + 1, \dots, n$$

Ec. 54

La Ec. 54 corresponde a las ecuaciones del movimiento de las  $m$  últimas variables  $q_k$ . Se puede definir la Ec. 53 en la forma:

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_l \lambda_l \cdot a_{lk} \right) \delta q_k = 0$$

Ec. 55

En esta ecuación las únicas  $\delta q_k$  que intervienen son las independientes, por lo tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_l \lambda_l \cdot a_{lk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - m$$

Ec. 56

Combinando las Ec. 56 y Ec. 54 se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l \cdot a_{lk} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ec. 57

Si se tienen en cuenta que las fuerzas generalizadas tienen una componente no conservativa (Ec. 35) el sistema completo de ecuaciones de Lagrange queda finalmente:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l \cdot a_{lk} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ec. 58

Es decir, se obtiene un sistema de  $n$  ecuaciones, donde  $n$  indica el número de coordenadas generalizadas, con  $n+m$  incógnitas donde  $m$  es el número de multiplicadores de Lagrange ( $\lambda_l$ ). De este sistema solo pueden obtenerse un total de  $n$  incógnitas, las  $m$  incógnitas restantes se obtienen de las ecuaciones de ligadura a diferencia de que ahora hay que considerarlas ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Considerando que las fuerzas generalizadas tienen una componente conservativa y otra no conservativa la Ec. 58 queda:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_j^{NC} + \sum_l \lambda_l \cdot a_{lk}$$

Ec. 59

## 5 Ecuaciones de Lagrange aplicadas a un vehículo Shell Eco-Marathon

Para estudiar el comportamiento dinámico del vehículo es necesario describirlo por medio de ecuaciones que van a limitar su movimiento. En este caso se van a utilizar las Ecuaciones de Lagrange, para ello primero hay que modelizar el vehículo mediante coordenadas de punto de referencia; segundo, plantear las ecuaciones de restricción que relacionan las coordenadas dependientes anteriores; tercero, obtener las ecuaciones del movimiento del sistema a partir del formalismo de Lagrange y por último integrar las ecuaciones del movimiento.

A lo largo del capítulo 4 se ha mostrado el proceso de deducción de las ecuaciones de Lagrange que rigen el comportamiento de un sistema de partículas dando como resultado final la Ec. 59. Las ecuaciones de Lagrange en forma matricial junto con la consideración de la segunda derivada temporal de las ecuaciones de ligadura son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \vec{Q}^A + \left( \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{q}} \right) \cdot \vec{\lambda}$$
$$\ddot{\vec{\Phi}} = 0$$

Ec. 60

Donde:

- $L$  es la función lagrangiana.
- $\vec{Q}^A$  son las fuerzas generalizadas.
- $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{q}}$  es la matriz jacobiana de restricciones.
- $\vec{\lambda}$  son los multiplicadores de Lagrange.
- $\vec{q}$  son las coordenadas generalizadas.
- $\vec{\Phi}$  son las ecuaciones de restricción.

La función lagrangiana es una función de la energía cinética y potencial del sistema:

$$L = T - U$$

Ec. 61

En la Figura 11 se muestra un dibujo en planta de la modelización del vehículo.

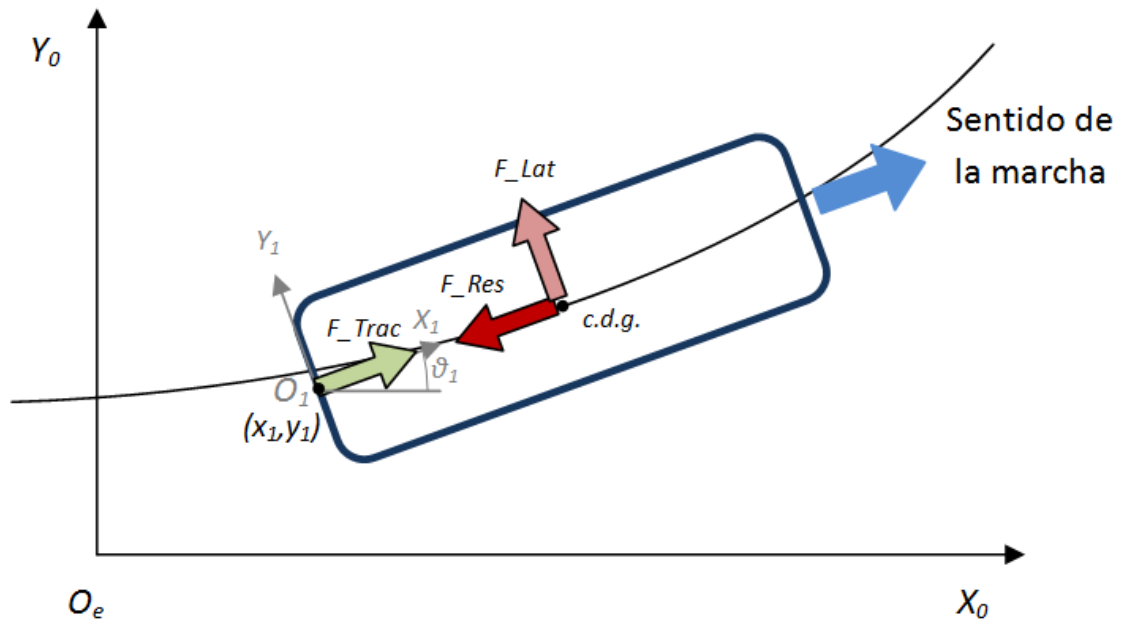


Figura 11: Modelización del vehículo

Para un vehículo que se mueve libremente la energía cinética y energía potencial son:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}_1^2$$

$$U = m \cdot g \cdot z = m \cdot g \cdot (z_0 + z)$$

Donde:

- m es la masa del vehículo.
- $I_G$  es el momento de inercia de vehículo respecto de un eje perpendicular al plano XY.
- g es la aceleración de la gravedad.
- $z_0$  es la cota a partir de la cual se inicia el tramo recto.
- z es el incremento de la altura causado por la pendiente.

La altura z se calcula como la suma de una cota inicial más la distancia que recorre el vehículo multiplicada por el seno del ángulo de la pendiente del tramo y se obtiene de distinta forma para ambos tipos de tramos.



## 5.1 Modelización de tramos rectos

En la Figura 12 se muestra la modelización de un tramo recto en coordenadas polares,  $O_e$  es el origen del sistema de coordenadas global, los ejes  $X_0$  e  $Y_0$  son los ejes de coordenadas globales,  $O_1$  es el origen de coordenadas local,  $X_1$  e  $Y_1$  los ejes de coordenadas locales,  $\theta_1$  es ángulo de giro del sistema de coordenadas global respecto del local,  $(x_0, y_0)$  indica el punto de origen del trayecto,  $(x_1, y_1)$  es el punto en el que se encuentra en vehículo en cada momento y  $\varphi$  es ángulo que forma la trayectoria con el eje  $X_0$ .

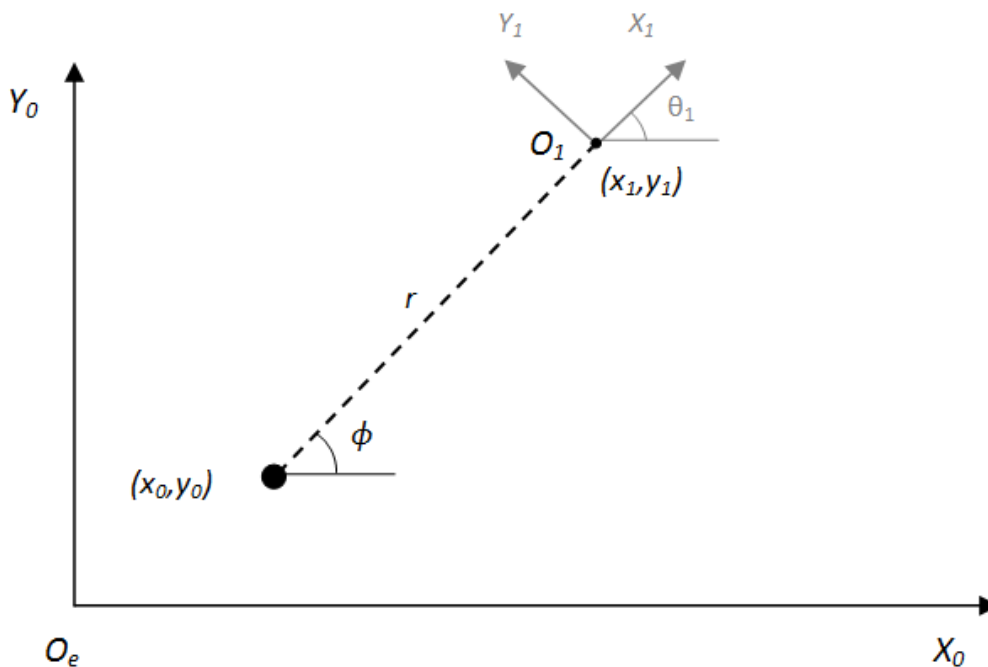


Figura 12: Modelización tramo recto

Teniendo en cuenta la traslación de los ejes y la transformación de las coordenadas en polares:

$$\begin{cases} x - x_0 = r \cdot \cos \varphi \\ y - y_0 = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Donde:

- $x_0$  es la coordenada x inicial.
- $y_0$  es la coordenada y inicial.

Por lo tanto,  $L$  para tramos rectos en coordenadas polares, teniendo en cuenta que  $\varphi$  es constante, es:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}_1^2 - m \cdot g \cdot (z_0 + \sin \beta \cdot r)$$

**Ec. 62**

Donde:

- $\beta$  es la pendiente del tramo.

Una vez obtenido el lagrangiano (Ec. 62) hay que obtener la Ec. 60.

La derivada del lagrangiano respecto de las coordenadas generalizadas es:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \left[ \frac{\partial L}{\partial r} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right]^T = [-m \cdot g \cdot \sin \beta \quad 0 \quad 0]^T$$

**Ec. 63**

La derivada del lagrangiano respecto de las velocidades generalizadas y ésta respecto del tiempo es:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right]^T = [m \cdot \dot{r} \quad 0 \quad I_G \cdot \dot{\theta}_1]^T$$

**Ec. 64**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = [m \cdot \ddot{r} \quad 0 \quad I_G \cdot \ddot{\theta}_1]^T$$

**Ec. 65**

Las fuerzas generalizadas son:

$$\vec{Q}^A = \begin{pmatrix} F_{Trac} - F_{Res} \\ r \cdot F_{Lat} \\ b_1 \cdot F_{Lat} \end{pmatrix}$$

**Ec. 66**

Donde:

- $F_{Trac}$  es la fuerza de tracción del coche.
- $F_{Res}$  es la fuerza de resistencia al avance que comprende la fuerza de resistencia aerodinámica y la fuerza de resistencia a la rodadura.
- $F_{Lat}$  es la fuerza lateral que sufre el vehículo.

Las ecuaciones de restricción para un tramo recto son:

$$\begin{aligned}\Phi_1(r, \varphi, \theta_1) &\equiv \varphi - \theta_1 = 0 \\ \Phi_2(r, \varphi, \theta_1) &\equiv \varphi - \alpha = 0\end{aligned}$$

La primera restricción indica que el sistema de coordenadas local se mueve siempre con el mismo ángulo respecto de las coordenadas globales y la segunda indica que el vehículo se mueve siempre por una recta de ángulo  $\alpha$  constante. Puestas las restricciones en forma vectorial queda:

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi - \theta_1 \\ \varphi - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Ec. 67**

La derivada de  $\vec{\Phi}$  respecto de las coordenadas generalizadas es:

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ec. 68**

Y respecto del tiempo dos veces es:

$$\ddot{\vec{\Phi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} - \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Ec. 69**

Introduciendo la Ec. 64, Ec. 65, Ec. 66, Ec. 68 y Ec. 69, la Ec. 60 queda:

$$\begin{pmatrix} m \cdot \ddot{r} \\ 0 \\ I_G \cdot \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{Trac} - F_{Res} \\ r \cdot F_{Lat} \\ b_1 \cdot F_{Lat} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{\Phi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} - \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando y agrupando las ecuaciones anteriores en un sistema queda:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{r} = -m \cdot g \cdot \sin \beta + F_{Trac} - F_{Res} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -r \cdot F_{Lat} \\ I_G \ddot{\theta}_1 + \lambda_1 = b_1 \cdot F_{Lat} \\ \ddot{\varphi} - \ddot{\theta}_1 = 0 \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Ec. 70

Las ecuaciones a resolver se obtienen despejando de la Ec. 70 las incógnitas  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\theta_1$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Teniendo en que la segunda derivada temporal de  $\varphi$  es igual que la segunda derivada temporal de  $\theta$  y que  $\varphi$  es constante y de valor  $\alpha$  es sistema queda:

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{1}{m} (-m \cdot g \cdot \sin \beta + F_{Trac} - F_{Res}) \\ \lambda_2 = -r \cdot F_{Lat} - \lambda_1 \\ \lambda_1 = b_1 \cdot F_{Lat} \end{cases}$$

Ec. 71

Además de despejar las incógnitas hay que obtener las expresiones de la fuerza de tracción ( $F_{trac}$ ), la fuerza de resistencia ( $F_{res}$ ) y la fuerza lateral ( $F_{lat}$ ). La fuerza de tracción es la fuerza de tracción del vehículo limitada por la fuerza máxima de tracción disponible dada por la Ec. 4 (Ec. 72) y a su vez disminuida por el peralte ([1]).

$$F_{trac} = \mu \cdot \left[ \frac{l_1}{L} \cdot P + \frac{h}{L} \cdot (F_{trac} - F_{res}) \right] \cdot \cos \zeta$$

Ec. 72

La fuerza de resistencia es la suma de la resistencia aerodinámica dada por la Ec. 7 y la fuerza de resistencia a la rodadura dada por la Ec. 5 (Ec. 73).

$$F_{res} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot A_f \cdot V^2 + m \cdot g \cdot (c_1 + c_2 \cdot V^2)$$

Ec. 73

La fuerza lateral (Ec. 74) es tan solo la causada por el peralte del tramo ( $\zeta$ ) ya que la fuerza centrífuga en una recta es cero.

$$F_{lat} = m \cdot g \cdot \sin \zeta$$

Ec. 74

## 5.2 Modelización de tramos curvos

En la Figura 13 se muestra la modelización para los tramos curvos empleando coordenadas cilíndricas, donde  $O_e$  es el origen del sistema de coordenadas global y  $X_0$  e  $Y_0$  sus ejes cartesianos,  $O_1$  es el origen de coordenadas local,  $X_1$  e  $Y_1$  los ejes de coordenadas locales,  $\theta_1$  es ángulo de giro del sistema de coordenadas global respecto del local,  $(x_c, y_c)$  indica el punto del centro de la curva,  $(x_0, y_0)$  indica el punto de origen del trayecto,  $(x_1, y_1)$  es el punto en el que se encuentra el vehículo en cada momento y  $\varphi$  es ángulo que forma la trayectoria con el eje  $X_0$ . Al igual que se hizo para rectas se hace una traslación al centro de la curva.

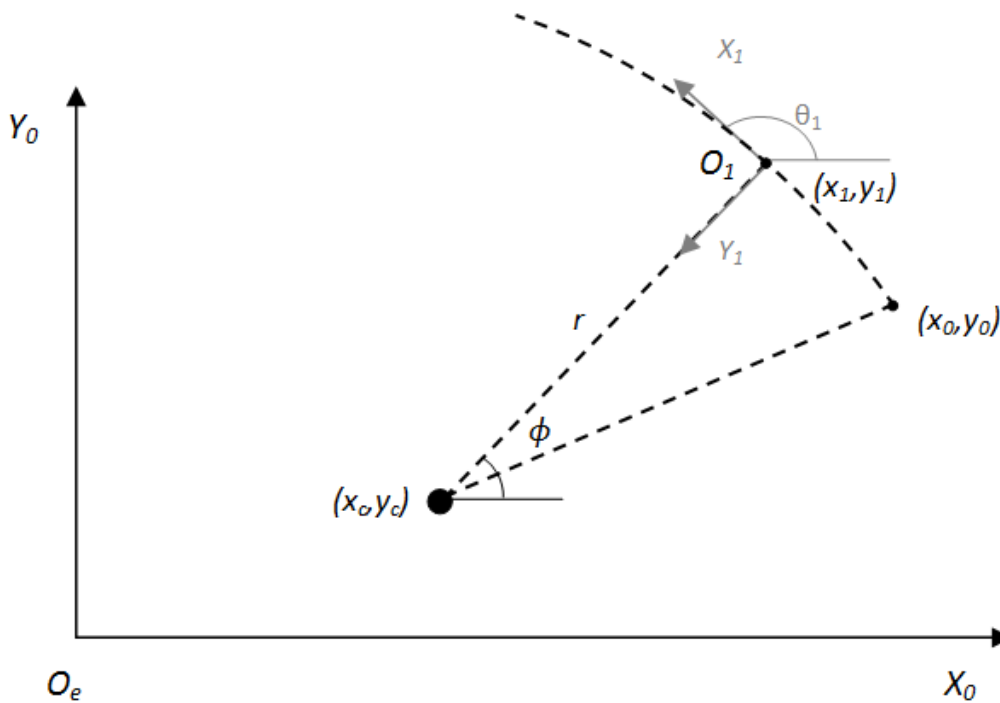


Figura 13: Modelización tramo curvo

La energía cinética en coordenadas polares teniendo en cuenta que  $r$  es constante es:

$$T = m(r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi) + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}_1^2$$

Ec. 75

La energía potencial es:

$$U = mg(z_0 + r \cdot \varphi \cdot \sin \beta)$$

Ec. 76

El lagrangiano queda por tanto:

$$L = T - U = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}_1^2 - mg(z_0 + r\varphi \sin \beta)$$

Ec. 77

La derivada del lagrangiano respecto de las coordenadas generalizadas es:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \left[ \frac{\partial L}{\partial r} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right]^T = [m \cdot r \cdot \dot{\varphi}^2 - m \cdot g \cdot \varphi \cdot \sin \beta \quad -m \cdot g \cdot r \cdot \sin \beta \quad 0]^T$$

Ec. 78

La derivada del lagrangiano respecto de las velocidades generalizadas y ésta respecto del tiempo es:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right]^T = [0 \quad m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \quad I_G \cdot \dot{\theta}_1]^T$$

Ec. 79

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = [0 \quad m \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi} \quad I_G \cdot \ddot{\theta}_1]^T$$

Ec. 80

En la dirección de  $u_r$  se aplica  $F_{Lat}$ , en la dirección de  $u_\phi$  actúa  $F_{Trac}-F_{res}$  pero multiplicada por  $r$  y en el caso de  $\theta$  es  $b_1$  multiplicado por  $F_{lat}$ . El vector de fuerzas generalizadas queda:

$$\vec{Q}^A = \begin{pmatrix} F_{Lat} \\ r \cdot (F_{Trac} - F_{Res}) \\ b_1 \cdot F_{Lat} \end{pmatrix}$$

Ec. 81

Para tramos curvos las ecuaciones de restricción son:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \varphi, \theta_1) &\equiv r - R = 0 \\ \Phi_2(r, \varphi, \theta_1) &\equiv \theta - \varphi - \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

La primera restricción indica que el vehículo se debe mover a lo largo de una trayectoria circular de radio  $R$  constante (con centro en  $(x_c, y_c)$ ) y la segunda establece

que el eje  $X_1$  se mantiene paralelo a un vector en la dirección tangente a la circunferencia.

Las ecuaciones de restricción en forma vectorial quedan:

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - R \\ \theta - \varphi - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ec. 82

La derivada de  $\vec{\Phi}$  respecto de las coordenadas generalizadas es:

$$\left( \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{q}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ec. 83

Y la derivada de  $\vec{\Phi}$  respecto del tiempo dos veces es:

$$\ddot{\vec{\Phi}} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta}_1 - \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ec. 84

Introduciendo las ecuaciones Ec. 78, Ec. 80, Ec. 81, Ec. 83 y Ec. 84 en la Ec. 60 queda:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi} \\ I_G \cdot \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \cdot r \cdot \dot{\varphi}^2 - m \cdot g \cdot \varphi \cdot \sin \beta \\ -m \cdot g \cdot r \cdot \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{Lat} \\ r \cdot (F_{Trac} - F_{Res}) \\ b_1 \cdot F_{Lat} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta}_1 - \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando y agrupando las dos ecuaciones en un sistema queda:

$$\begin{cases} -\lambda_1 = F_{Lat} + m \cdot r \cdot \dot{\varphi}^2 - m \cdot g \cdot \varphi \cdot \sin \beta \\ m \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi} + \lambda_2 = r \cdot (F_{Trac} - F_{Res}) - m \cdot g \cdot r \cdot \sin \beta \\ I_G \ddot{\theta}_1 - \lambda_2 = b_1 \cdot F_{Lat} \\ \ddot{r} = 0 \\ \ddot{\theta}_1 - \ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Ec. 85

Para la solución de los tramos curvos se emplean las ecuaciones dadas por la Ec. 85, teniendo en cuenta que  $r$  es siempre constante y de valor  $R$  y la quinta ecuación en la

que la segunda derivada temporal de  $\varphi$  es igual que la segunda derivada temporal de  $\theta$ , el sistema se reduce a tres ecuaciones con tres incógnitas. Despejando las incógnitas  $\varphi, \lambda_1, \lambda_2$ :

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \frac{1}{m \cdot R^2} [R \cdot (F_{trac} - F_{res}) - m \cdot g \cdot R \cdot \sin \beta - \lambda_2] \\ \lambda_1 = -F_{Lat} - m \cdot R \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot g \cdot \varphi \cdot \sin \beta \\ \lambda_2 = -b_1 \cdot F_{lat} + I_G \ddot{\varphi} \end{cases}$$

Ec. 86

En el [1] se muestra cómo varía la fuerza de tracción y la fuerza lateral como consecuencia de un peralte. La fuerza de tracción dada por la Ec. 4 es por tanto:

$$F_{trac} = \mu \cdot \left[ \frac{l_1}{L} \cdot P + \frac{h}{L} \cdot (F_{trac} - F_{res}) \right] \cdot \cos \zeta + m \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \sin \zeta$$

Ec. 87

Donde:

- $\zeta$  es el peralte de la curva.

Y la fuerza lateral es:

$$F_{lat} = m \cdot g \cdot \sin \zeta + m \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \cos \zeta$$

La expresión de la fuerza de resistencia es la misma que para una recta y viene dada por la Ec. 73.



## 6 Circuito EuroSpeedway Lausitz

EuroSpeedway Lausitz (hasta fines de 2003 Lausitzring) es un autódromo ubicado en el distrito de Oberspreewald-Lausitz, Alemania (Figura 14). El circuito recibe a categorías internacionales como el Campeonato Mundial de Superbikes, el DTM, el Campeonato FIA GT, la Fórmula 3 Euroseries, el A1 Grand Prix y las World Series by Renault, así como las locales Deutsche Tourenwagen Masters y Campeonato de Alemania de Fórmula 3.

Además de varias configuraciones mixtas desde 3200 hasta 4535 metros de extensión, EuroSpeedway incluye un óvalo triangular de 3200 metros, creado para recibir a la Champ Car en los años 2001 y 2003. A un lado del triángulo existe un segundo óvalo de 11.300 metros, compuesto de dos curvas fuertemente peraltadas y varias chicanes a lo largo de las rectas, que se usa como pista de pruebas. En la Figura 15 se muestran todas las configuraciones del trazado.



Figura 14: EuroSpeedway Lausitz [11]

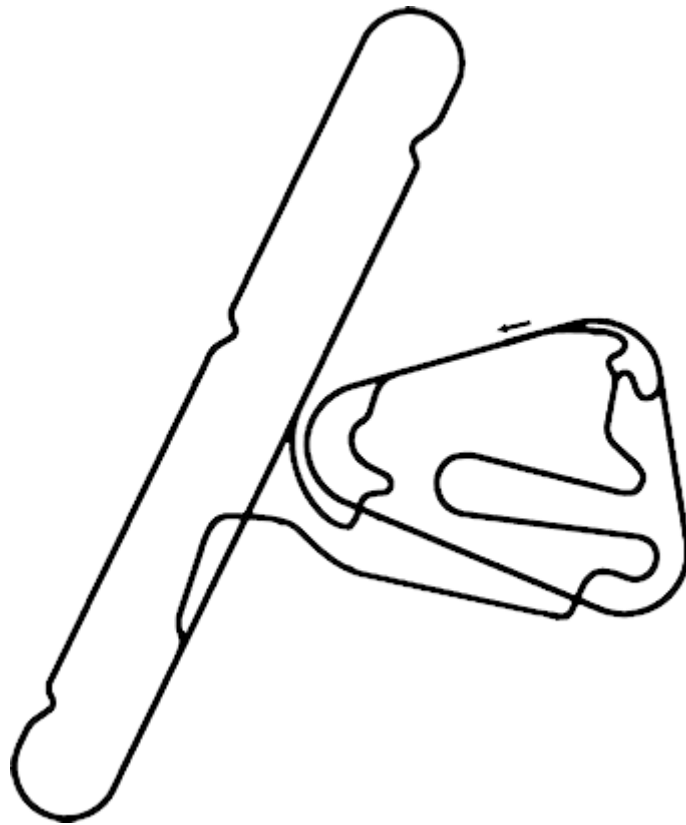


Figura 15: Variantes del complejo EuroSpeedway Lausitz [10]

La competición Shell Eco-Marathon se desarrolla en la variante ovalo triangular cuyo trazado se muestra en la Figura 16.



Figura 16: Ovalo triangular EuroSpeedway Lausitz [10]

El circuito oval tiene las siguientes características:

- Longitud: 3,2 km / 2 millas.
- 3 curvas a izquierdas.
- 3 rectas, la mayor de 800 metros / 0,5 millas.
- Peralte máximo del 15% o 8,5°.
- Ancho máximo de 18,5 metros / 56 pies.

En el ANEXO se incluye una vista reducida del plano original del trazado. El tamaño del original es DIN A-2 con una escala de 1:2000.

## 6.1 Coordenadas de los puntos del circuito

Para poder programar el comportamiento del vehículo a lo largo de una trayectoria es necesario obtener las coordenadas (x,y) de cada punto y las ecuaciones que representan las trayectorias. Dichas coordenadas se obtienen del plano del circuito proporcionado por la organización de la competición Shell Eco-marathon.

Si se mira con detalle en el plano del circuito la ubicación de los puntos se puede ver que hay zonas que realmente no corresponden a la zona de la pista por la que deben circular los vehículos, sino que corresponden a zonas de otras variantes del circuito o zonas de escapatoria y seguridad (Figura 17, Figura 18, Figura 19 y Figura 20). Los puntos que pertenecen a estas zonas son del 11 al 15 incluidos y del 36 al 40 incluidos.

Las coordenadas que se obtienen del plano están escaladas por lo que al aplicarles el factor de escala 1:2000 se obtienen las coordenadas reales (Tabla 1). Como se menciona en el presente capítulo los puntos 11, 12, 13, 14, 15, 36, 37, 38, 39 y 40 se han eliminado para los cálculos y representaciones, de aquí en adelante no se tendrán en cuenta.

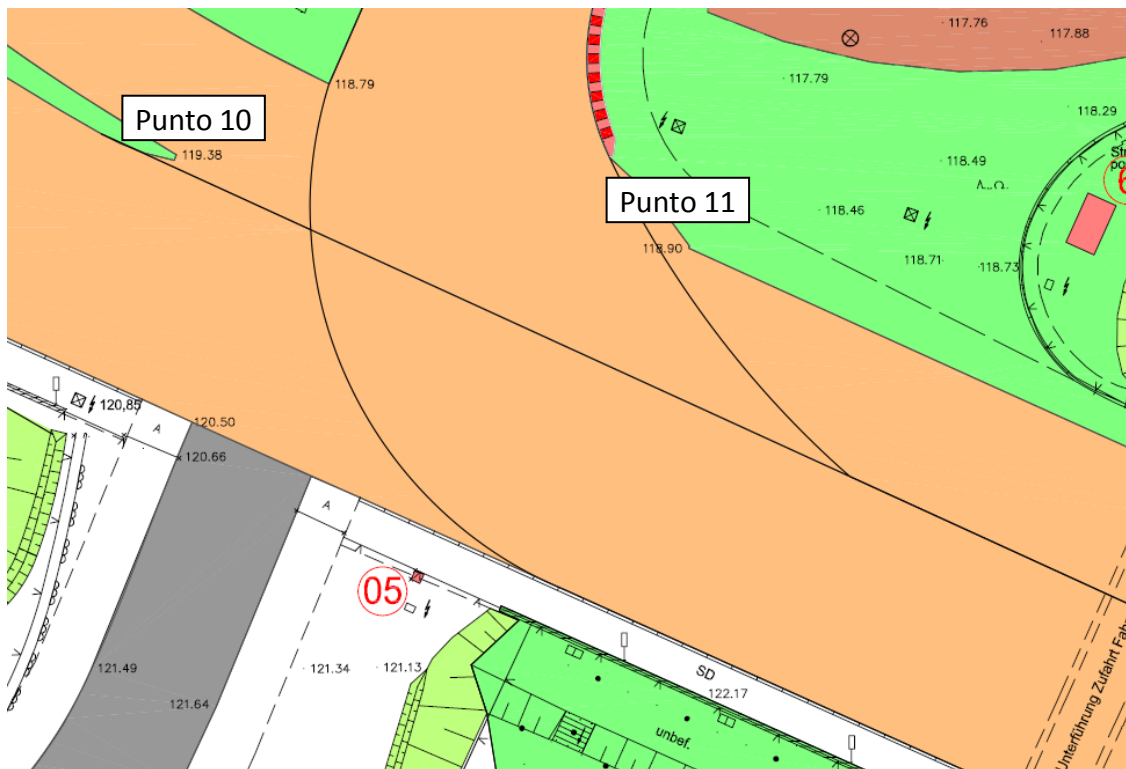


Figura 17: Zonas de otros trazados de la recta 2

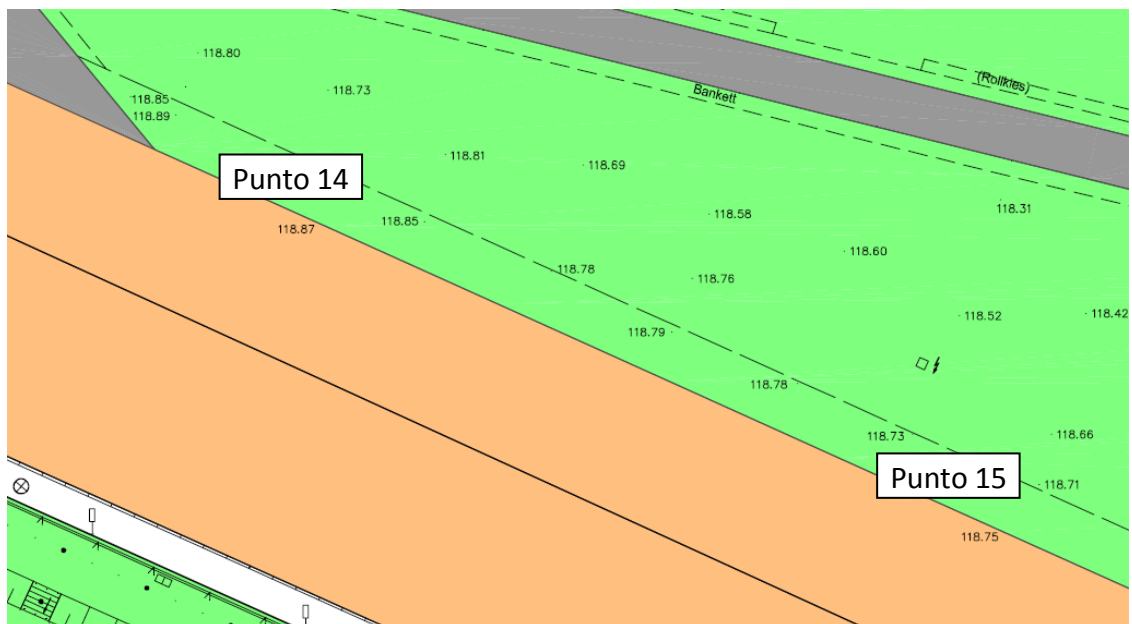


Figura 18: Zonas de escapatoria de la recta 2

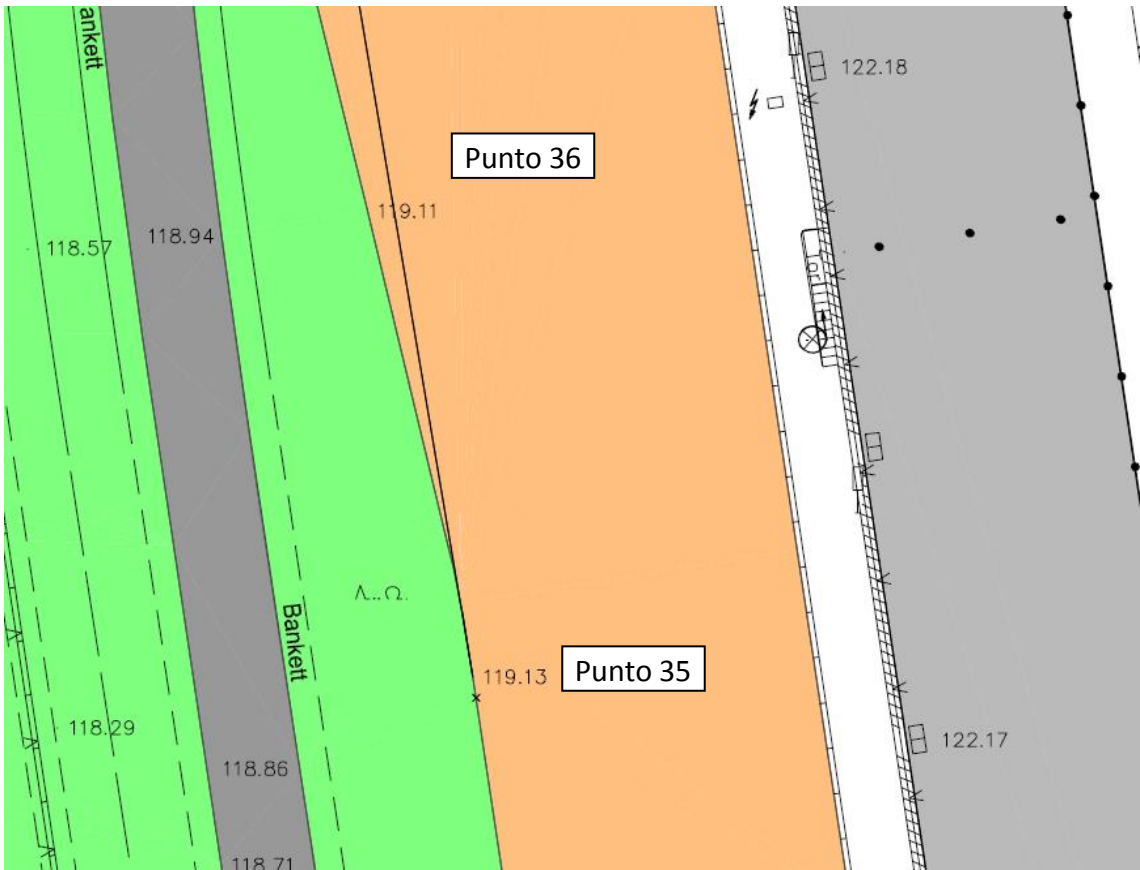


Figura 19: Zonas de otros trazados de la recta 3

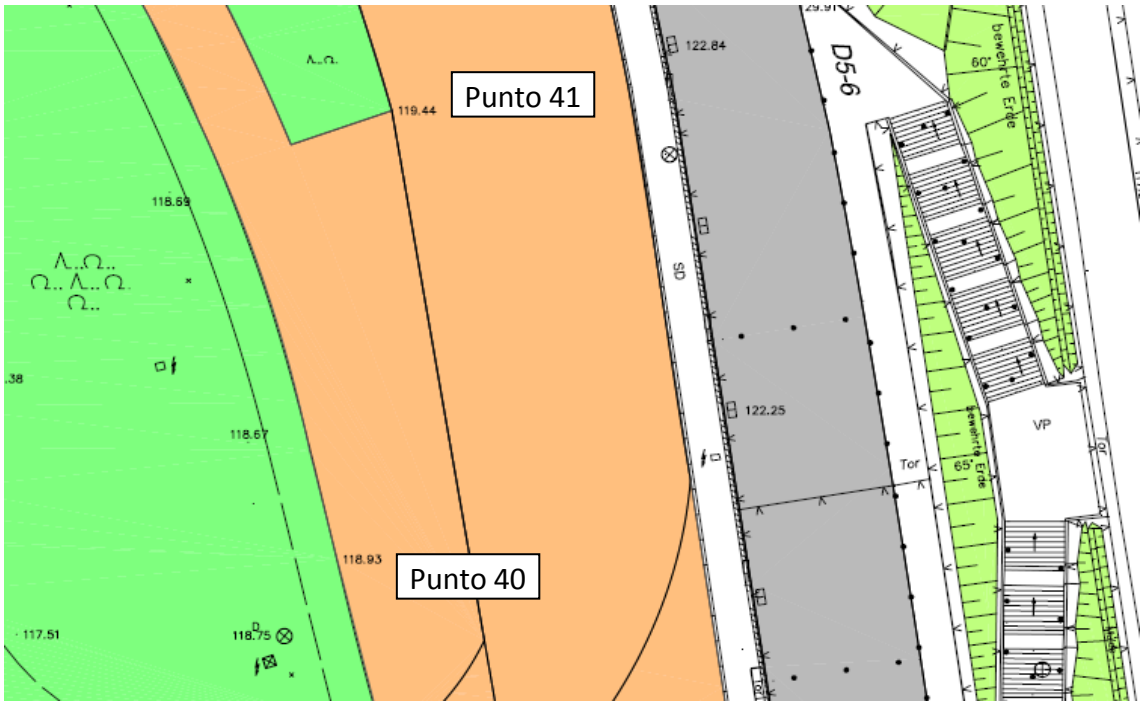


Figura 20: Zonas de escapatoria de la recta 3

**Tabla 1: Coordenadas de los puntos del circuito**

Punto	Xo (m)	Yo (m)
1	0,00	0,00
2	-48,96	-13,83
3	-239,73	-67,08
3'	-300,09	-84,64
4	-364,18	-114,54
5	-421,92	-169,48
6	-454,24	-258,23
7	-451,81	-306,63
8	-439,48	-349,42
9	-381,74	-423,97
10	-335,22	-454,24
16	39,80	-626,52
17	129,49	-666,13
18	208,72	-702,94
19	284,20	-737,14
20	406,22	-786,47
21	440,41	-793,19
22	472,18	-795,06
23	516,84	-788,34
24	578,87	-758,44
25	614,56	-723,87
26	642,59	-674,54
27	653,99	-629,88
28	656,23	-593,82
29	652,49	-535,90
30	642,96	-470,50
31	640,16	-451,44
32	631,57	-394,07
33	620,17	-317,65
34	614,00	-277,66
35	611,20	-256,92
41	573,27	-33,82
42	544,87	28,96
43	513,85	62,97
44	483,58	82,96
45	452,19	95,30
46	411,45	101,46
47	348,30	95,30
48	271,50	75,30

Punto	Xo (m)	Yo (m)
49	215,44	59,79

La representación de los puntos de la Tabla 1 en un gráfico x-y dan una representación del recorrido del circuito (Figura 21).

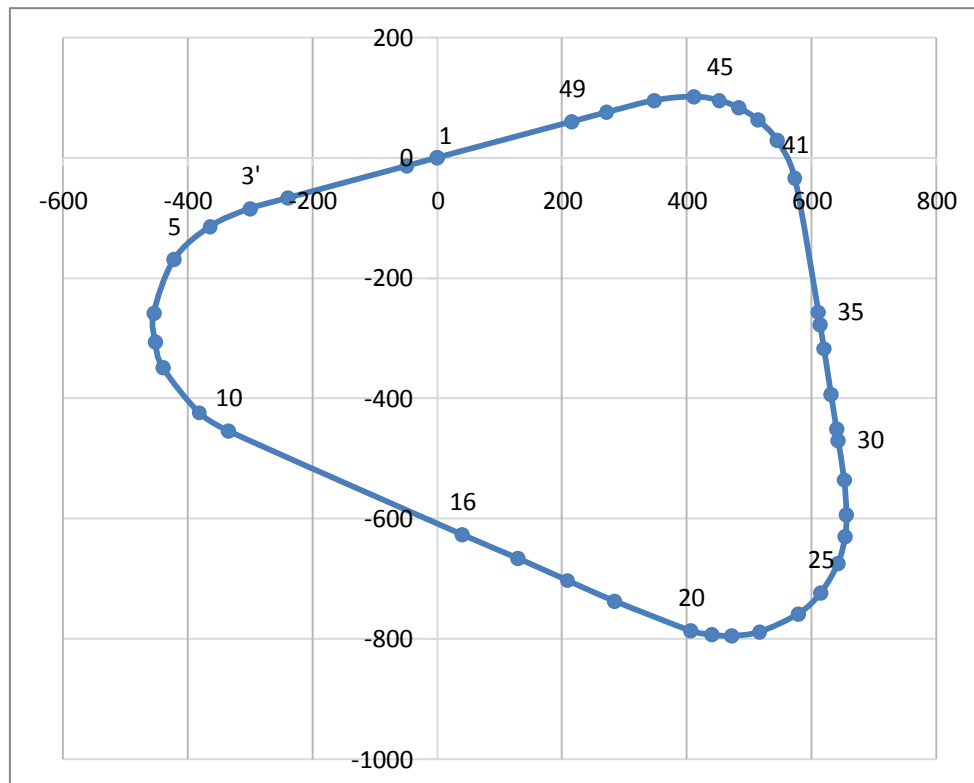


Figura 21: Trazado del circuito

## 6.2 Perfil del circuito

En la Figura 22 se muestra un gráfico en el que se representa la cota lo largo del recorrido, en el eje X se representa la distancia de cada punto tomado y en el eje Y su cota. La cota de cada punto y su distancia hasta el punto origen se muestran en la Tabla 2. Mencionar que para la obtención de la Figura 22 se han tomado distancias euclídeas por lo que la longitud de los tramos curvos es en realidad mayor.



**Tabla 2: Cota y distancia de cada punto**

Punto	Cota (m)	Distancia (m)
1	119,46	0,00
2	119,45	50,87
3	119,44	248,94
4	119,49	382,52
5	119,48	462,22
6	119,47	556,68
7	119,48	605,13
8	119,47	649,66
9	119,47	743,96
10	119,38	799,47
16	118,95	1212,16
17	118,79	1310,21
18	118,64	1397,57
19	118,52	1480,44
20	118,46	1612,05
21	118,47	1646,90
22	118,49	1678,72
23	118,49	1723,88
24	118,49	1792,75
25	118,49	1842,43
26	118,49	1899,17
27	118,48	1945,26
28	118,47	1981,39
29	118,47	2039,44
30	118,57	2105,53
31	118,62	2124,79
32	118,76	2182,80
33	118,95	2260,06
34	119,06	2300,52
35	119,13	2321,45
41	119,44	2547,76
42	119,48	2616,67
43	119,48	2662,69
44	119,48	2698,97
45	119,48	2732,70
46	119,51	2773,90



Punto	Cota (m)	Distancia (m)
47	119,45	2837,35
48	119,46	2916,71
49	119,46	2974,87

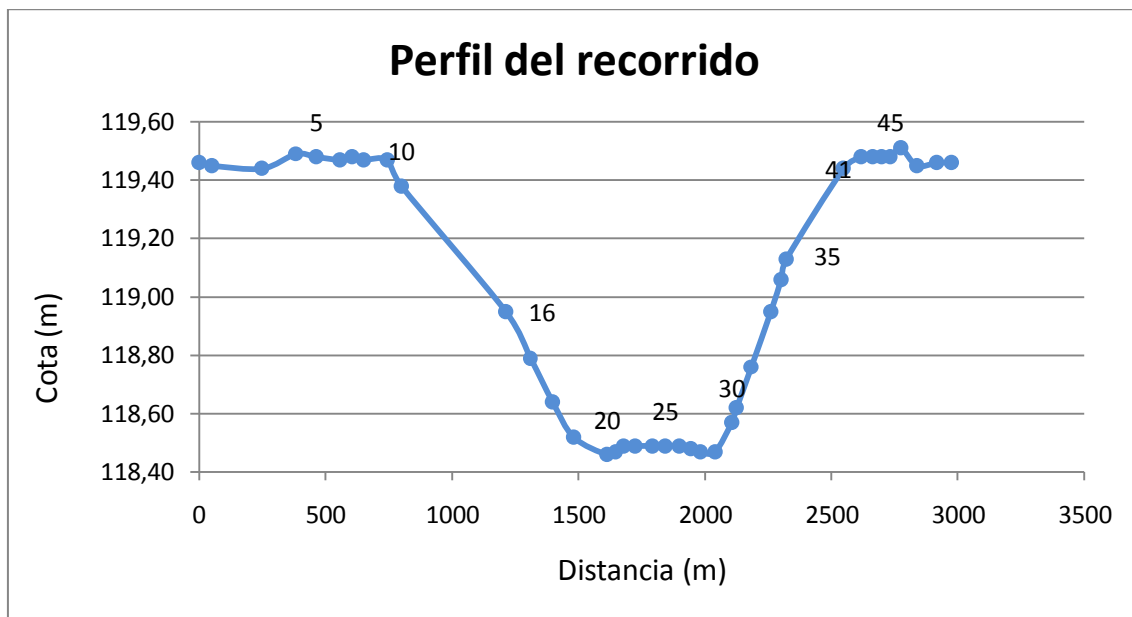


Figura 22: Perfil del recorrido

## 6.3 Datos de los tramos

Una vez obtenidas las coordenadas y cota de cada punto se divide el trayecto completo en tramos diferenciando entre tramos rectos y tramos curvos.

### 6.3.1 Tramos rectos

Para modelizar los tramos rectos se necesitan conocer su orientación, su pendiente y su longitud. La orientación  $\alpha$  se calcula como:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Donde:

- $\Delta y$  es la variación de la coordenada y entre dos puntos.
- $\Delta x$  es la variación de la coordenada x entre dos puntos.

La pendiente es la tangente del ángulo de subida o bajada, por lo tanto  $\beta$  es el arco seno de la variación de la cota entre la longitud del tramo:

$$\beta = \sin^{-1} \frac{\text{Diferencia de cota}}{\text{longitud del tramo}}$$

La longitud del tramo se puede calcular matemáticamente como la distancia entre dos puntos:

$$\text{longitud} = \sqrt{(y_f - y_0)^2 + (x_f - x_0)^2}$$

En la Tabla 3 se muestran conjuntamente la longitud, la pendiente y la orientación de cada tramo.

**Tabla 3: Pendiente de cada tramo**

Tramo	Longitud tramo (m)	Pendiente (rad)	Orientación (rad)
1 - 2	50,87	-0,000197	3,417
2 - 3	198,08	-0,000050	3,414
3 - 3'	62,86	0,000398	3,425
10 - 16	412,71	-0,001042	5,853
16 - 17	98,05	-0,001632	5,867
17 - 18	87,36	-0,001717	5,848
18 - 19	82,87	-0,001448	5,858
19 - 20	131,61	-0,000456	5,899
29 - 30	66,09	0,001513	1,715
30 - 31	19,26	0,002595	1,717
31 - 32	58,01	0,002414	1,720
32 - 33	77,27	0,002459	1,719
33 - 34	40,46	0,002719	1,724
34 - 35	20,93	0,003344	1,715
35 - 41	226,31	-0,000884	1,735
47 - 48	79,36	-0,000252	3,396

Tramo	Longitud tramo (m)	Pendiente (rad)	Orientación (rad)
48 - 49	58,16	-0,001032	3,412
49 - 1	223,59	0,000045	3,412

### 6.3.2 Tramos curvos

Para modelizar los tramos curvos se necesitan conocer su radio, coordenadas del centro, su pendiente y su peralte.

Para las tres curvas que contiene el circuito se aprecia que su radio no es constante a lo largo de ella por lo que cada tramo debe tener un centro y radio diferentes. En la Figura 23 se muestra un esquema de un tramo curvo, donde  $(x_i, y_i)$  es el punto inicial,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  el punto final y  $(x_c, y_c)$  el centro de la curva.

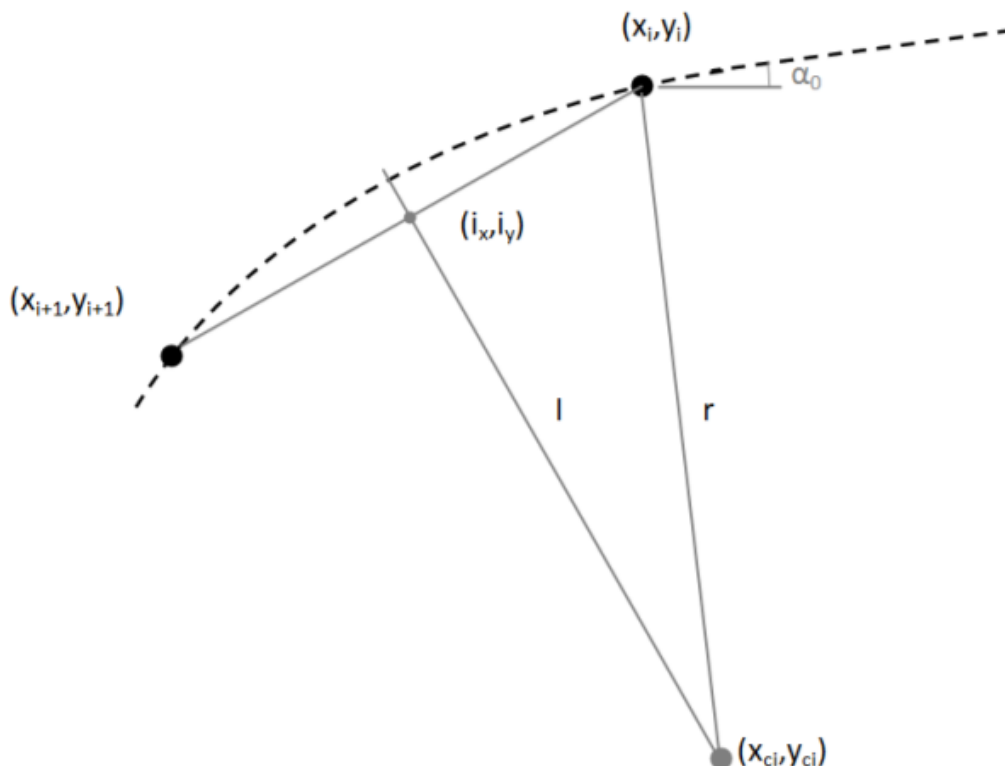


Figura 23: Cálculo de radio y centro de un tramo curvo

En el cálculo de los centros y radios de todos los tramos de la curva se deben cumplir dos condiciones, la primera es que tanto el punto inicial como el final deben cumplir la misma ecuación de la circunferencia, y la segunda condición es que la pendiente en el punto  $(x_i, y_i)$  debe ser la misma tanto para el tramo anterior como para el siguiente

tramo. La primera condición se puede ver en la Figura 23 en la forma de la recta  $l$ , es decir, el centro de la circunferencia se debe encontrar en la mediatriz de la recta que forman el punto  $(x_i, y_i)$  y el  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . La segunda condición se traduce en que el centro de la circunferencia se debe encontrar en una recta perpendicular a la recta con la última pendiente del tramo anterior (para el inicio del cálculo se emplea la pendiente en radianes de la recta precedente).

Una recta en forma vectorial se expresa como:

$$(x, y) = \lambda(r_1, r_2) + (x_0, y_0)$$

Ec. 88

Donde:

- $(r_1, r_2)$  es el vector director de la recta.
- $\lambda$  es un escalar de valor arbitrario.
- $(x_0, y_0)$  es un punto de la recta.

De esta ecuación resulta útil y cómodo eliminar  $\lambda$  ya que puede tomar cualquier valor. Separando las dos coordenadas y despejando  $\lambda$  se tiene:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{r_1} = \frac{y - y_0}{r_2}$$

Despejando  $y - y_0$ , la ecuación de la recta queda en forma simplificada:

$$y - y_0 = \frac{r_2}{r_1}(x - x_0) = m(x - x_0)$$

Ec. 89

Para calcular la recta  $l$  hay que conocer primero el punto  $(i_x, i_y)$ :

$$i_x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}; i_y = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

La pendiente de la recta  $l$  es:

$$m_i = -\frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i}$$

Tomando como punto de origen el punto  $(i_x, i_y)$  el punto  $(x_c, y_c)$  se puede obtener como:

$$y_c - i_y = m(x_c - i_x)$$

Poniendo  $y_c$  y  $x_c$  en un mismo lado:

$$y_c - mx_c = i_y - mi_x$$

**Ec. 90**

Para calcular la recta  $r$  el proceso es el mismo que para la recta  $l$ . La pendiente del primer tramo curvo es:

$$m_0 = \tan \alpha$$

Por lo tanto la pendiente de la recta  $r$  es  $-m_0^{-1}$ .

Tomando como punto de origen el punto  $(x_1, y_1)$  el punto  $(x_c, y_c)$  se puede obtener como:

$$y_c + \frac{1}{m_0} x_c = y_1 + \frac{1}{m_0} x_1$$

**Ec. 91**

Haciendo un sistema con la Ec. 90 y la Ec. 91:

$$\begin{cases} y_c - mx_c = i_y - mi_x \\ y_c + \frac{1}{m_0} x_c = y_1 + \frac{1}{m_0} x_1 \end{cases}$$

Y escribiendo el sistema en forma matricial  $AX=B$  queda:

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \\ \frac{1}{m_0} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_y - mi_x \\ y_1 + \frac{1}{m_0} x_1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema para cada tramo,  $x_c$  y  $y_c$  se calculan como:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & 1 \\ \frac{1}{m_0} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} i_y - m i_x \\ y_1 + \frac{1}{m_0} x_1 \end{pmatrix}$$

Ec. 92

Los resultados para la Curva 1 con  $\alpha_0 = 3,425$  rad se muestran en la Tabla 4.

**Tabla 4: Coordenadas del centro y radio de la curva 1**

Curva1				
Tramo	$x_c$ (m)	$y_c$ (m)	R (m)	longitud (m)
3' - 4	-251,38	-272,76	194,32	71,12
4 - 5	-199,79	-345,13	283,19	79,96
5 - 6	-304,06	-262,68	150,26	96,09
6 - 7	-150,11	-267,23	304,28	48,51
7 - 8	-304,94	-287,46	148,13	44,70
8 - 9	-249,50	-261,92	209,18	95,12
9 - 10	-218,12	-223,43	258,84	55,62

Los resultados para la Curva 2 con  $\alpha_0 = 5,899$  rad se muestran en la Tabla 5.

**Tabla 5: Coordenadas del centro y radio de la curva 2**

Curva2				
Tramo	$x_c$ (m)	$y_c$ (m)	R (m)	longitud (m)
20 - 21	448,57	-691,98	103,56	35,46
21 - 22	464,79	-486,25	309,92	31,79
22 - 23	468,50	-641,93	154,21	45,49
23 - 24	433,71	-536,55	265,18	69,06
24 - 25	506,92	-648,45	131,45	49,99
25 - 26	368,32	-551,33	300,70	56,82
26 - 27	520,00	-619,48	134,41	46,32
27 - 28	-502,55	-539,96	1160,05	36,13
28 - 29	394,36	-581,66	262,17	58,17

Los resultados para la Curva 3 con  $\alpha_0 = 1,735$  rad se muestran en la Tabla 6.

**Tabla 6: Coordenadas del centro y radio de la curva 3**

<b>Curva3</b>				
<b>Tramo</b>	<b><math>x_c</math> (m)</b>	<b><math>y_c</math> (m)</b>	<b>R (m)</b>	<b>longitud (m)</b>
41 - 42	441,44	-55,67	133,64	69,70
42 - 43	213,24	-242,37	428,49	46,05
43 - 44	447,75	-4,17	94,22	36,51
44 - 45	79,20	-900,42	1063,29	33,73
45 - 46	417,26	2,03	99,59	41,50
46 - 47	458,93	-711,97	814,81	63,47

## 7 Resultados

Dado que el problema se ha planteado con la actuación de una fuerza de tracción constante ( $F_{trac}$ ) el vehículo se puede mover bien aplicando una fuerza de tracción constante o bien obteniendo la fuerza de una constante, la potencia.

Dado que el espíritu de la competición es el poder recorrer la mayor distancia con el menor consumo de combustible posible, el recorrido total en la prueba es muy inferior a la longitud total teórica recorrida (25,6 km dando las 8 vueltas frente a una distancia teórica del orden de 2.000 kilómetros). Si se diera el caso de realizar la longitud teórica, habría que realizar del orden de 650 vueltas, por lo que la influencia de la pérdida de velocidad en la vuelta de salida y de llegada en la velocidad media global sería despreciable, es decir en las hipotéticas 648 vueltas restantes la velocidad media en cada vuelta sería de aproximadamente 30 km/h. Por este motivo se estudia el caso de una vuelta a una velocidad media de 30 km/h con la condición de que sus velocidades inicial y final coincidan.

La resolución del problema consiste en introducir los datos del circuito y los del vehículo en las ecuaciones de Lagrange y resolverlas. Una vez se tienen los primeros resultados se calcula la velocidad media obtenida ( $V_m$ ) y se compara con los 30 km/h, en caso de ser diferentes se vuelve a repetir el proceso de resolución tantas veces como sea necesario con otra fuerza de tracción ( $F_{trac}$ ) o potencia ( $Pot$ ) hasta que la velocidad media obtenida coincida con los 30 km/h. El esquema de resolución de las 7 vueltas con una fuerza de tracción constante se muestra en la Figura 24 y con una potencia constante en la Figura 25.

Para la vuelta lanzada es necesario comparar la velocidad inicial ( $V_0$ ) con la final ( $V_f$ ), si no coinciden se vuelven a resolver las ecuaciones de Lagrange con otra velocidad inicial dato. El esquema de resolución con una fuerza de tracción constante se muestra en la Figura 26 y con una potencia constante en la Figura 27.



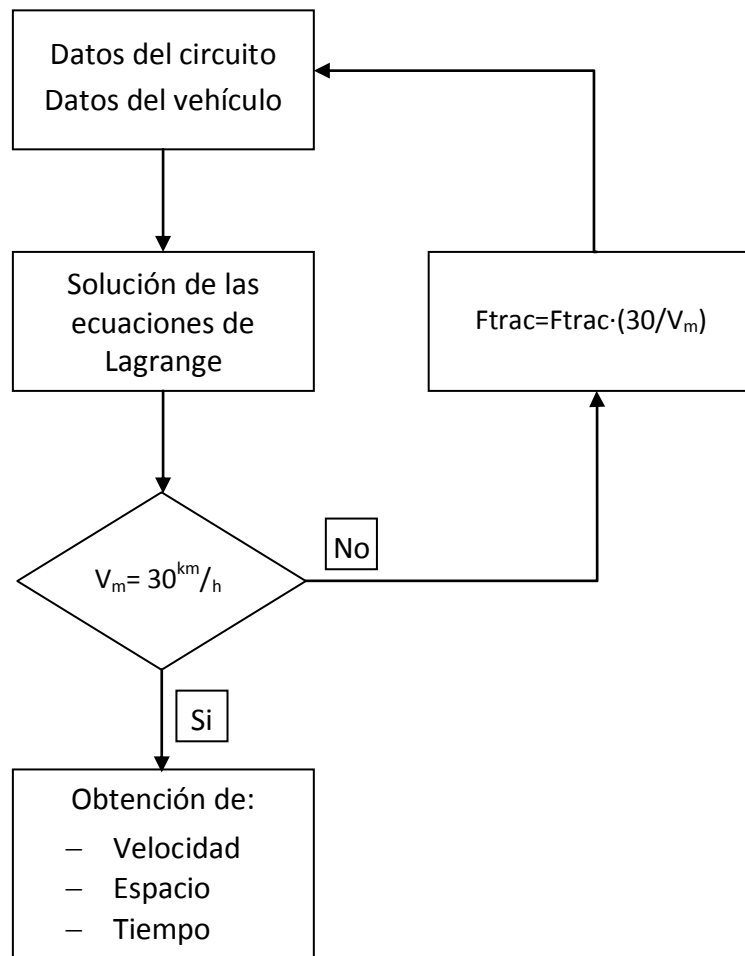


Figura 24: Esquema de la resolución de las ecuaciones de Lagrange para las 7 vueltas a fuerza de tracción constante

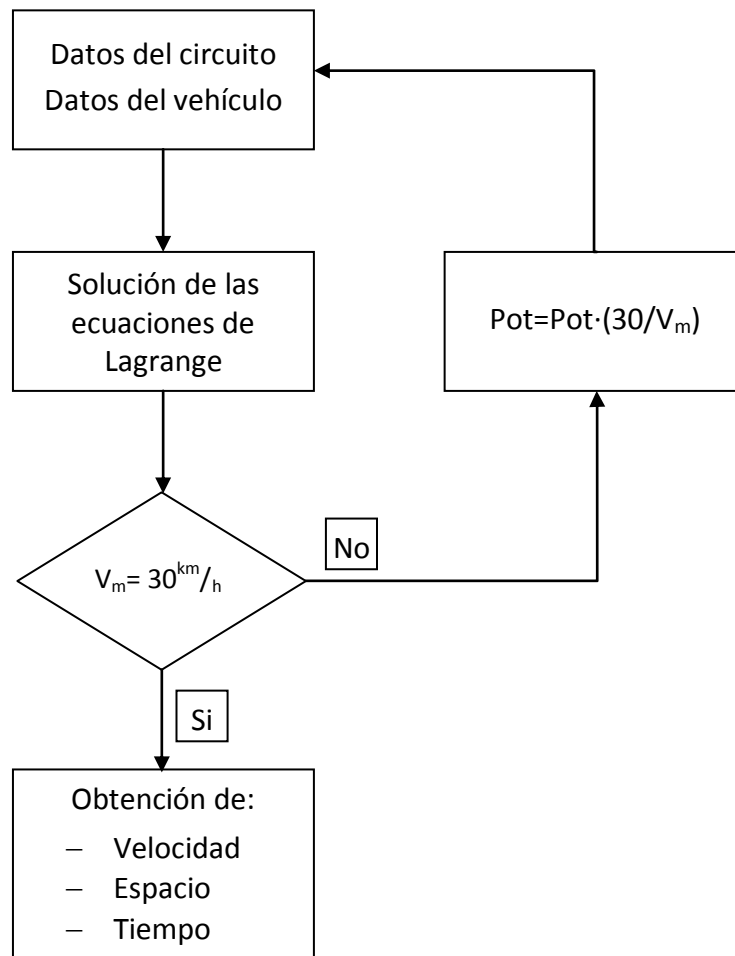


Figura 25: Esquema de la resolución de las ecuaciones de Lagrange para las 7 vueltas a potencia constante

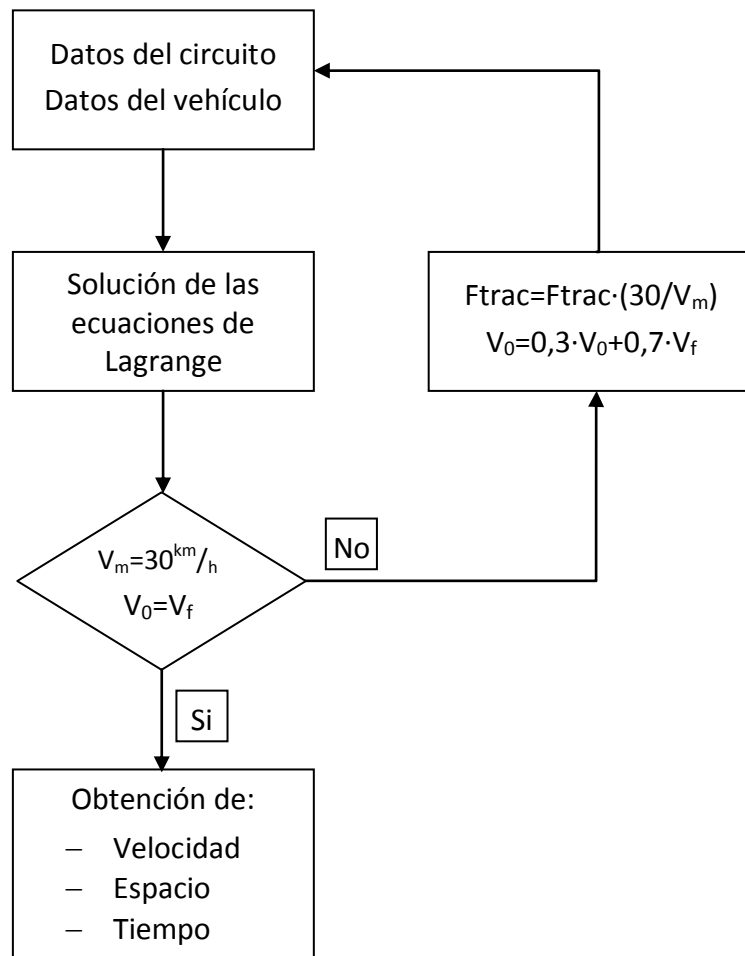


Figura 26: Esquema de la resolución de las ecuaciones de Lagrange para la vuelta lanzada a fuerza de tracción constante

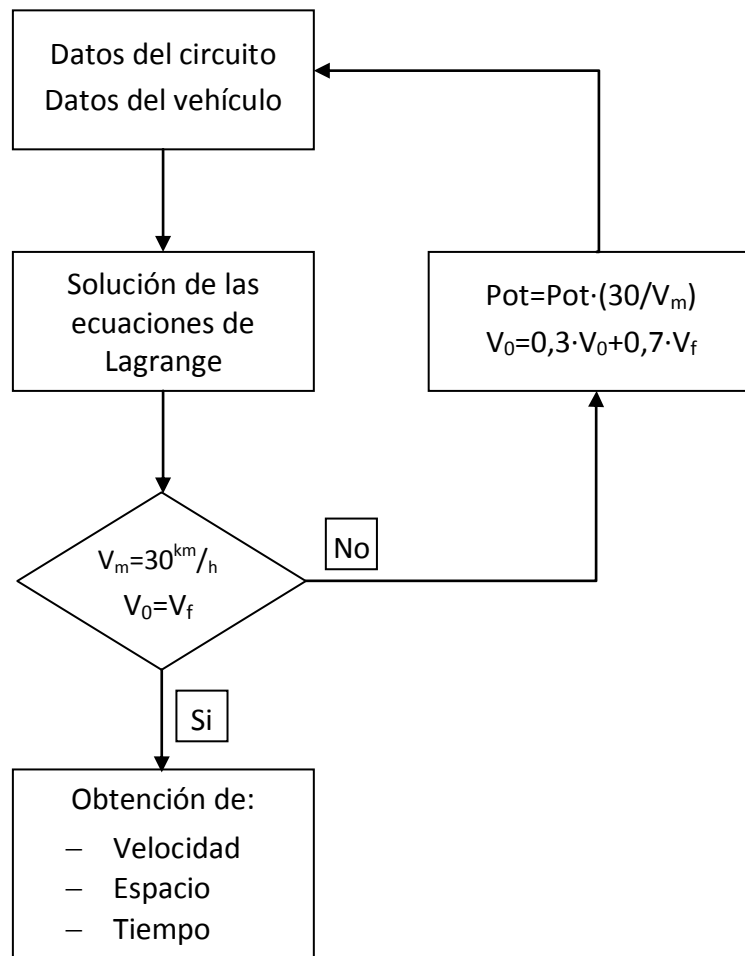


Figura 27: Esquema de la resolución de las ecuaciones de Lagrange para la vuelta lanzada a potencia constante

Para la resolución de las ecuaciones de Lagrange se ha empleado simulink con la rutina de Runge-Kutta de orden 4 de paso fijo de 0,01 s.

Los datos que se han empleado para la simulación son los siguientes:

- Masa total del vehículo: 120 kg.
- Aceleración de la fuerza de gravedad:  $9,81 \text{ m/s}^2$ .
- Momento central de inercia:  $88,2 \text{ kg/m}^2$ .
- Área frontal:  $0,35 \text{ m}^2$ .
- Distancia entre ejes: 1,50 m.
- Distancia rueda trasera a centro de gravedad: 0,5 m.
- Altura del centro de gravedad: 0,22 m.
- Coeficiente de rozamiento: 0,75.
- Coeficiente de resistencia aerodinámica: 0,15.
- Densidad del aire:  $1,3 \text{ kg/m}^3$ .
- Coeficiente de rodadura  $c_1$ : 0,0005.
- Coeficiente de rodadura  $c_2$ : 0,000045.

Los datos del circuito se introducen en la resolución del problema en forma de una matriz que contiene la información del recorrido. La matriz de tramos es una matriz de  $n_t \times 8$  siendo  $n_t$  el número total de tramos en lo que se divide el trayecto y cada columna indica las características del tramo. Las columnas indican lo siguiente:

- La primera columna indica si el tramo se trata de uno recto o curvo, para rectas el valor es "0" y para curvas "1".
- La segunda columna indica la coordenada x del punto inicial.
- La tercera columna indica la coordenada y del punto inicial.
- La cuarta columna indica la longitud del tramo.
- La quinta columna indica la pendiente del tramo.
- La sexta columna para el caso de recta indica su orientación y para curvas indica la coordenada x de del centro de la circunferencia que describe la curva.
- La séptima columna para el caso de recta no indica nada, por eso su valor "0", y para curvas indica la coordenada y de del centro de la circunferencia que describe la curva.
- La octava columna indica el peralte de cada tramo.

La matriz de tramos para el trazado oval del circuito Eurospeedway es:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 50,87 & -0,000197 & 3,417 & 0 & 0,1125 \\ 0 & -48,96 & -13,83 & 198,08 & -0,000050 & 3,414 & 0 & 0,1125 \\ 0 & -239,74 & -67,08 & 62,86 & 0,000398 & 3,425 & 0 & 0,1125 \\ 1 & -300,10 & -84,65 & 71,12 & 0,000398 & -251,38 & -272,76 & 0,1125 \\ 1 & -364,19 & -114,54 & 79,96 & -0,000125 & -199,79 & -345,13 & 0,1352 \\ 1 & -421,93 & -169,48 & 96,09 & -0,000106 & -304,06 & -262,68 & 0,1479 \\ 1 & -454,26 & -258,24 & 48,51 & 0,000206 & -150,11 & -267,23 & 0,1489 \\ 1 & -451,83 & -306,64 & 44,70 & -0,000224 & -304,94 & -287,46 & 0,1479 \\ 1 & -439,49 & -349,43 & 95,12 & 0 & -249,50 & -261,92 & 0,1479 \\ 1 & -381,75 & -423,98 & 55,62 & -0,001620 & -218,12 & -223,43 & 0,1125 \\ 0 & -335,23 & -454,26 & 412,69 & -0,001042 & 5,853 & 0 & 0,0599 \\ 0 & 39,80 & -626,54 & 98,05 & -0,001632 & 5,867 & 0 & 0,0599 \\ 0 & 129,49 & -666,15 & 87,36 & -0,001717 & 5,848 & 0 & 0,0599 \\ 0 & 208,72 & -702,97 & 82,87 & -0,001448 & 5,858 & 0 & 0,0599 \\ 0 & 284,21 & -737,16 & 131,63 & -0,000456 & 5,899 & 0 & 0,0599 \\ 1 & 406,23 & -786,49 & 35,46 & 0,000287 & 448,57 & -691,98 & 0,1125 \\ 1 & 440,43 & -793,22 & 31,79 & 0,000628 & 464,79 & -486,25 & 0,1263 \\ 1 & 472,19 & -795,09 & 45,49 & 0 & 468,50 & -641,93 & 0,1332 \\ 1 & 516,85 & -788,36 & 69,06 & 0 & 433,71 & -536,55 & 0,1401 \\ 1 & 578,89 & -758,46 & 49,99 & 0 & 506,92 & -648,45 & 0,1401 \\ 1 & 614,58 & -723,89 & 56,82 & 0 & 368,32 & -551,33 & 0,1401 \\ 1 & 642,61 & -674,56 & 46,32 & -0,000217 & 520,00 & -619,48 & 0,1332 \\ 1 & 654,01 & -629,90 & 36,13 & -0,000277 & -502,55 & -539,96 & 0,1263 \\ 1 & 656,25 & -593,84 & 58,17 & 0 & 394,36 & -518,66 & 0,1125 \\ 0 & 652,51 & -535,91 & 66,09 & 0,001513 & 1,715 & 0 & 0,0887 \\ 0 & 642,98 & -470,51 & 19,26 & 0,002595 & 1,717 & 0 & 0,0887 \\ 0 & 640,18 & -451,45 & 58,00 & 0,002414 & 1,720 & 0 & 0,0887 \\ 0 & 631,59 & -394,09 & 77,27 & 0,002459 & 1,719 & 0 & 0,0887 \\ 0 & 620,19 & -317,66 & 40,43 & 0,002719 & 1,724 & 0 & 0,0887 \\ 0 & 614,02 & -277,67 & 21,12 & 0,003344 & 1,705 & 0 & 0,0887 \\ 0 & 611,22 & -256,93 & 226,14 & 0,001370 & 1,735 & 0 & 0,0887 \\ 1 & 573,29 & -33,82 & 69,70 & 0,000579 & 441,44 & -55,67 & 0,1214 \\ 1 & 544,88 & 28,96 & 46,05 & 0 & 213,24 & -242,37 & 0,1484 \\ 1 & 513,86 & 62,97 & 36,51 & 0 & 447,75 & -4,17 & 0,1484 \\ 1 & 483,59 & 82,97 & 33,73 & 0 & 79,20 & -900,42 & 0,1484 \\ 1 & 452,20 & 95,30 & 41,50 & 0,001213 & 417,26 & 2,03 & 0,0910 \\ 1 & 411,46 & 101,46 & 63,47 & -0,000315 & 458,93 & -711,97 & 0,0868 \\ 0 & 348,31 & 95,30 & 79,36 & -0,000756 & 3,396 & 0 & 0,0868 \\ 0 & 348,31 & 75,30 & 58,16 & 0,000172 & 3,412 & 0 & 0,0868 \\ 0 & 215,45 & 59,80 & 223,59 & 0 & 3,412 & 0 & 0,0868 \end{bmatrix}$$

## 7.1 Fuerza de tracción constante

En esta sección se muestran los resultados obtenidos para un vehículo al que se le aplica una fuerza de tracción constante en todo el recorrido.

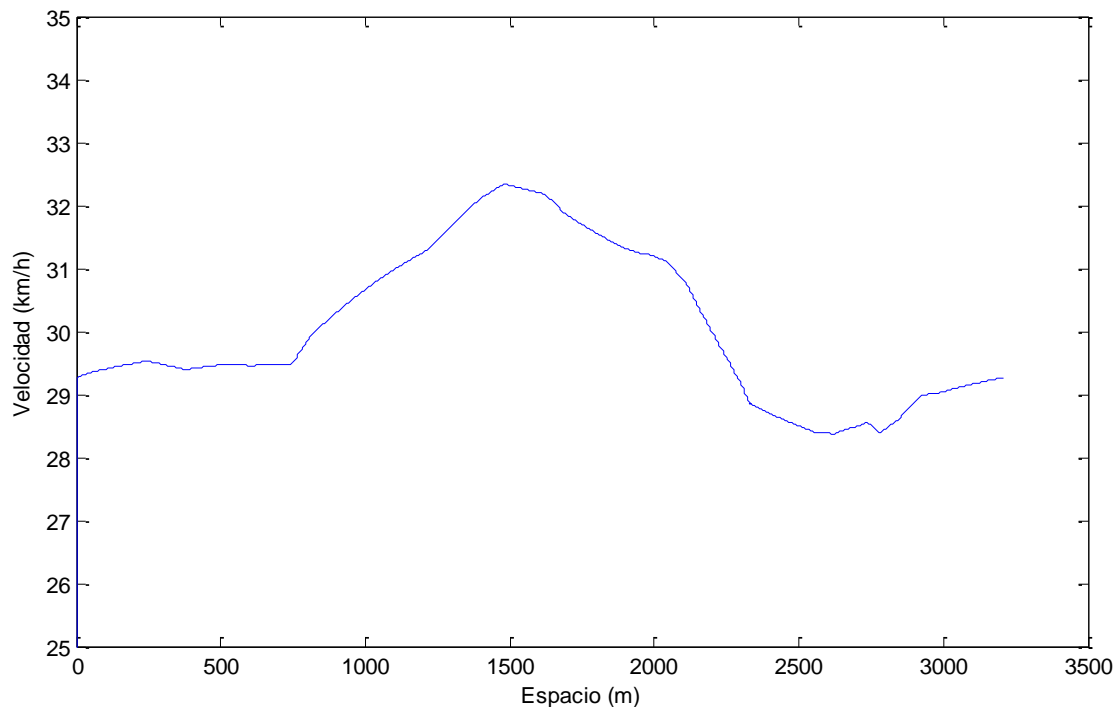
### 7.1.1 Resultados para la vuelta lanzada

Para la vuelta lanzada a una velocidad media de 30 km/h en la que la velocidad inicial y final coinciden, los resultados se muestran en la Tabla 7.

**Tabla 7: Resultados para una vuelta lanzada a fuerza de tracción constante**

<b>Fuerza de tracción</b>	6,78 N
<b>Energía</b>	21.735 J
<b>Velocidad inicial</b>	29,3 km/h

En la Figura 28 se representa la velocidad frente al espacio recorrido.



**Figura 28: Velocidad-espacio para la vuelta lanzada a fuerza de tracción constante**

En la Tabla 8 se muestra para puntos separados cada 100 metros la velocidad que debe llevar el vehículo y el tiempo parcial que debe marcar el vehículo a su paso por ellos. Otra manera de mostrar los resultados es mostrando la velocidad que debe llevar el coche cada 20 segundos por ejemplo, y el espacio que debe haber recorrido, en la Tabla 9 se muestran los resultados.

**Tabla 8: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta lanzada a fuerza de tracción constante**

<b>Vuelta lanzada</b>		
<b>Distancia (m)</b>	<b>Velocidad (km/h)</b>	<b>Tiempo (s)</b>
100	29,4	12
200	29,5	25
300	29,5	37
400	29,4	49
500	29,5	61
600	29,5	73
700	29,5	86
800	29,9	98
900	30,3	110
1000	30,7	122
1100	31,0	133
1200	31,2	145
1300	31,7	156
1400	32,1	168
1500	32,3	179
1600	32,2	190
1700	31,8	201
1800	31,6	212
1900	31,3	224
2000	31,2	235
2100	30,8	247
2200	30,0	259
2300	29,2	271
2400	28,7	284
2500	28,5	296
2600	28,4	309
2700	28,5	321



Vuelta lanzada		
Distancia (m)	Velocidad (km/h)	Tiempo (s)
2800	28,4	334
2900	28,9	347
3000	29,0	359
3100	29,2	371
3200	29,3	384

Tabla 9: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta lanzada a fuerza de tracción constante

Vuelta lanzada		
Tiempo (s)	Velocidad (km/h)	Distancia (m)
20	29,5	163
40	29,4	327
60	29,5	490
80	29,5	653
100	29,9	818
120	30,6	986
140	31,1	1158
160	31,8	1332
180	32,3	1510
200	31,9	1689
220	31,4	1864
240	31,1	2038
260	29,9	2207
280	28,8	2370
300	28,5	2529
320	28,5	2686
340	28,6	2844
360	29,0	3005
380	29,2	3166

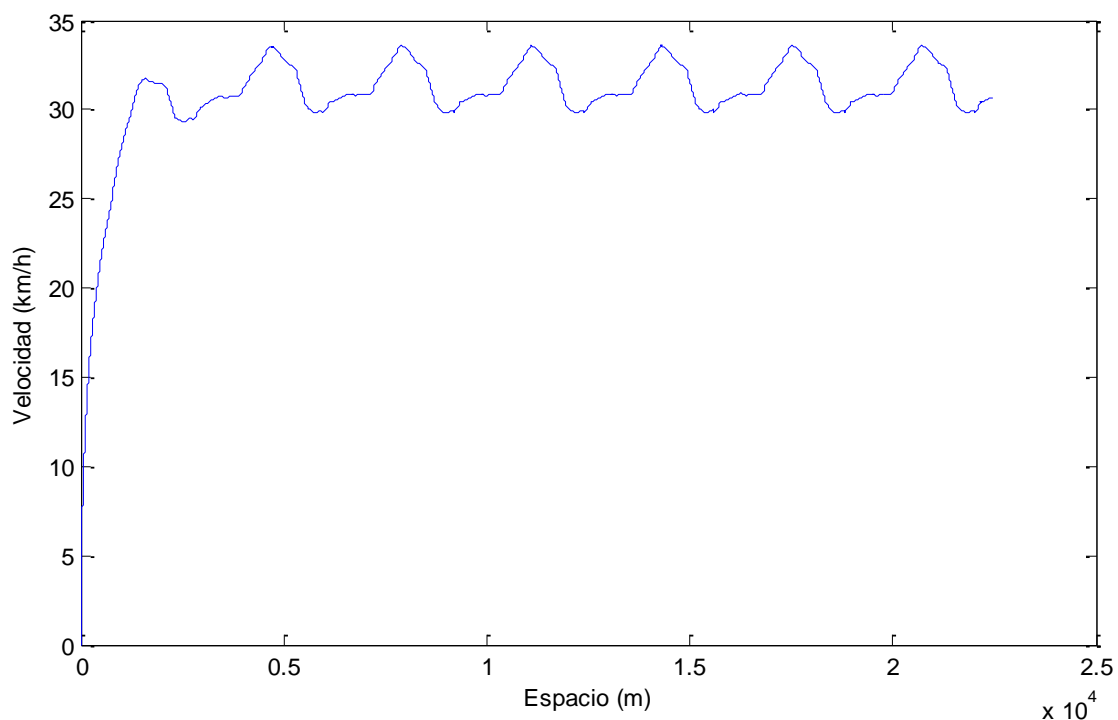
### 7.1.2 Resultados para las 7 vueltas

En el caso del cálculo en las vueltas totales hay que mencionar que dado que el modelo se ha planteado sin la acción de una fuerza de frenado para los cálculos no se tiene en cuenta la última vuelta por lo que solo se hace la simulación para 7 vueltas. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 10.

**Tabla 10: Resultados para 7 vueltas a fuerza de tracción constante.**

<b>Fuerza de tracción</b>	7,26 N
<b>Energía total</b>	162.880 J
<b>Energía por vuelta</b>	23.268 J
<b>Velocidad final</b>	30,6 km/h

En la Figura 29 se representa la velocidad de vehículo para cada punto del circuito a lo largo de las 7 vueltas.



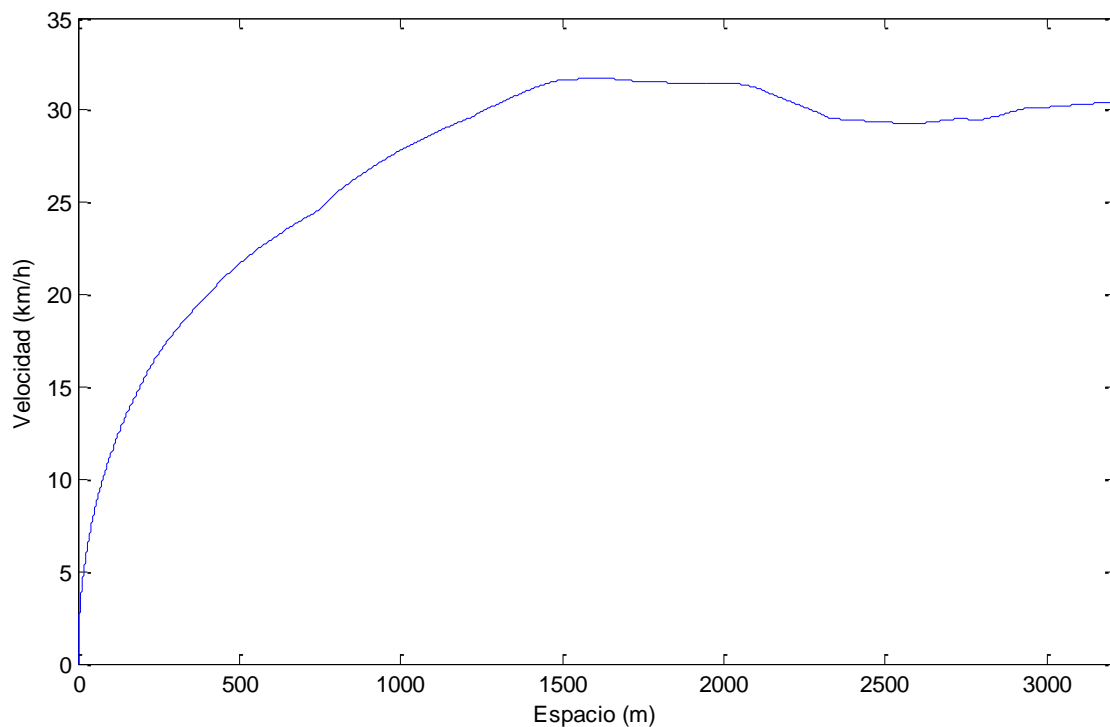
**Figura 29: Velocidad-Espacio para las 7 vueltas a fuerza de tracción constante**

### 7.1.2.1 Primera vuelta

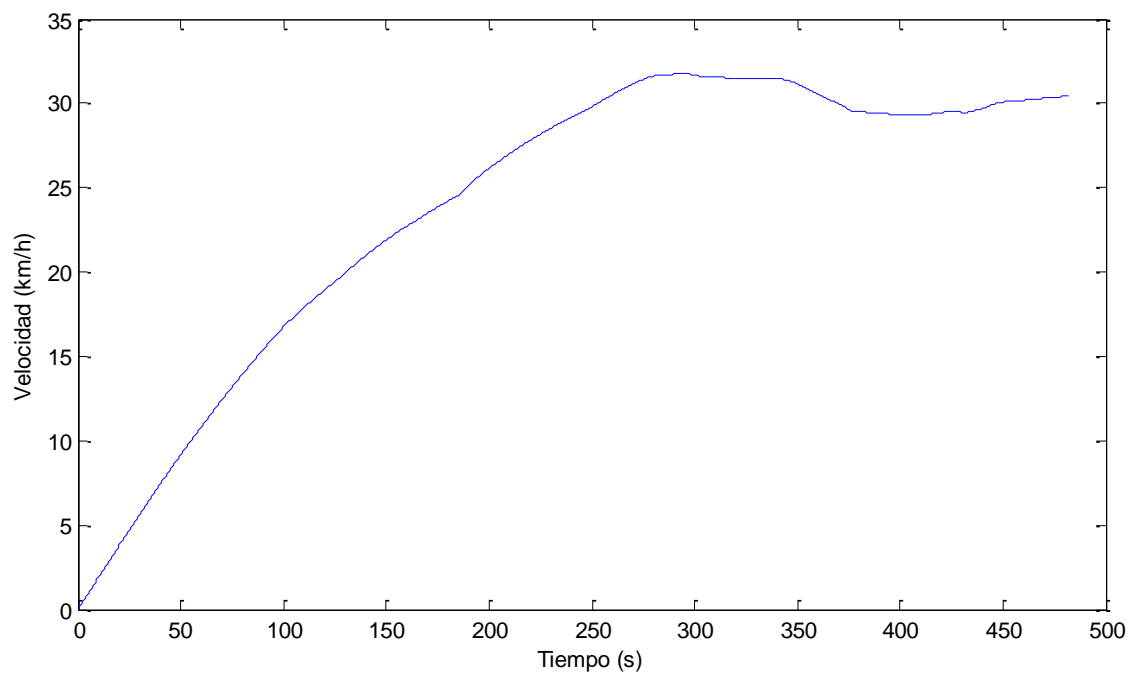
En un primer momento se aprecia que el coche alcanza una estabilidad de la vuelta 3 en adelante lo que hace que desde esta vuelta en adelante el coche se comporte de la misma manera en todas las vueltas. En la Figura 30 se muestra la primera vuelta, en la Figura 32 se muestra la segunda vuelta y en la Figura 34 se muestra de la vuelta 3 a la 7.

Las características de la vuelta 1 (Figura 30) son:

- Velocidad final: 30,4 km/h.
- Velocidad media: 23,9 km/h.



**Figura 30: Velocidad-espacio para la primera vuelta a fuerza de tracción constante**



**Figura 31: Velocidad-tiempo para la primera vuelta a fuerza de tracción constante**

En la Tabla 11 se muestra la velocidad y el tiempo que debe marcar el vehículo cada 100 metros a lo largo de la vuelta. Si se desean ver los datos cada 20 segundos éstos se muestran en la Tabla 12.

**Tabla 11: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta 1 de 7 a fuerza de tracción constante**

Vuelta 1		
Distancia (m)	Velocidad (km/h)	Tiempo (s)
100	11,2	62
200	15,3	90
300	18,0	111
400	19,9	130
500	21,6	147
600	23,0	164
700	24,1	179
800	25,5	193
900	26,7	207
1000	27,8	220
1100	28,7	233
1200	29,5	245
1300	30,3	258

Vuelta 1		
Distancia (m)	Velocidad (km/h)	Tiempo (s)
1400	31,1	269
1500	31,6	281
1600	31,8	292
1700	31,6	303
1800	31,5	315
1900	31,4	326
2000	31,5	338
2100	31,2	349
2200	30,5	361
2300	29,8	373
2400	29,5	385
2500	29,4	397
2600	29,3	409
2700	29,5	422
2800	29,5	434
2900	29,9	446
3000	30,2	458
3100	30,3	470
3200	30,4	482

Tabla 12: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta 1 de 7 a fuerza de tracción constante

Vuelta 1		
Tiempo (s)	Velocidad (km/h)	Distancia (m)
20	3,8	10
40	7,4	42
60	10,8	92
80	13,9	161
100	16,7	246
120	18,9	345
140	20,9	456
160	22,7	577
180	24,2	707
200	26,1	847
220	27,8	996
240	29,1	1155

Vuelta 1		
Tiempo (s)	Velocidad (km/h)	Distancia (m)
260	30,5	1320
280	31,6	1493
300	31,7	1669
320	31,5	1844
340	31,5	2018
360	30,6	2191
380	29,5	2357
400	29,3	2521
420	29,4	2683
440	29,7	2847
460	30,2	3013
480	30,4	3182
482	30,4	3205

#### 7.1.2.2 Segunda vuelta

En la vuelta 2 el movimiento del vehículo no se estabiliza ya que las velocidades inicial y final no coinciden. Las características de la vuelta 2 (Figura 32) son:

- Velocidad inicial: 30,4 km/h.
- Velocidad final: 30,6 km/h.
- Velocidad media: 31,3 km/h.

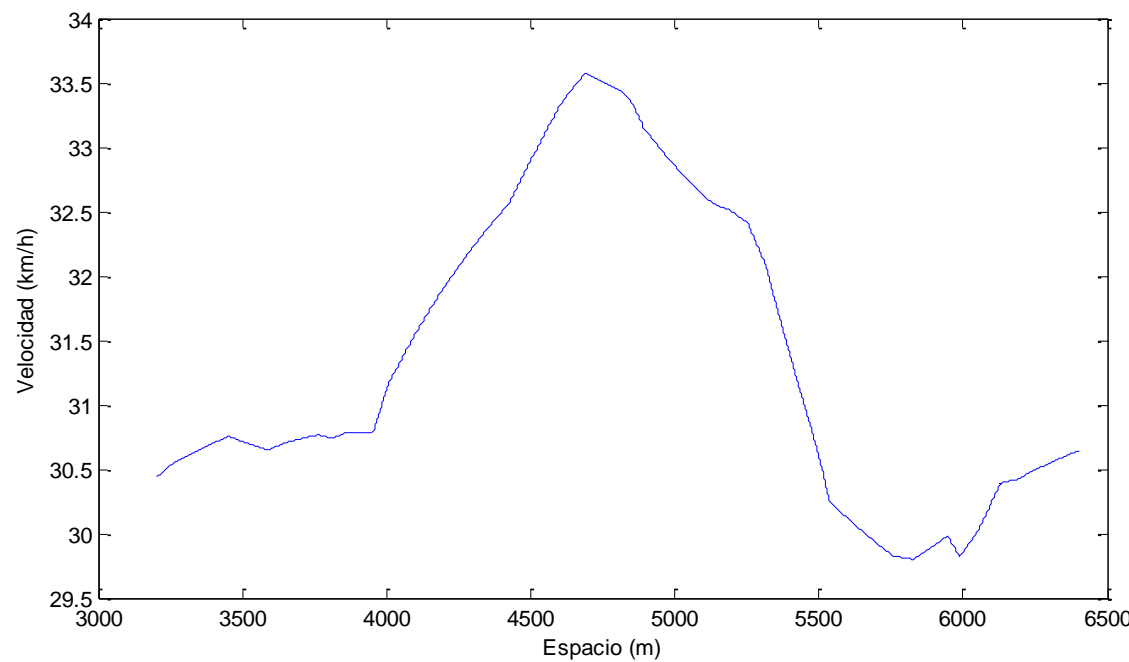


Figura 32: Velocidad-espacio para la segunda vuelta a fuerza de tracción constante

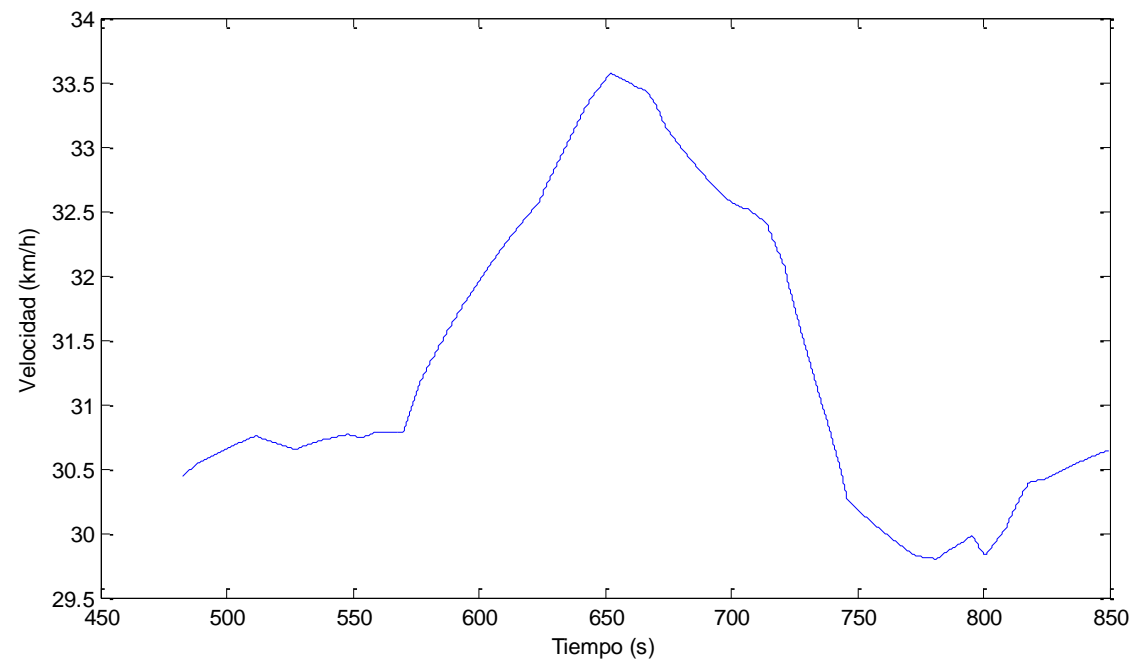


Figura 33: Velocidad-tiempo para la segunda vuelta a fuerza de tracción constante

En la Tabla 13 se muestra la velocidad y el tiempo que debe marcar el vehículo cada 100 metros a lo largo de la vuelta. Si se desean ver los datos cada 20 segundos éstos se muestran en la Tabla 14.

**Tabla 13: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta 2 de 7 a fuerza de tracción constante**

<b>Vuelta 2</b>		
<b>Distancia (m)</b>	<b>Velocidad (km/h)</b>	<b>Tiempo (s)</b>
100	30,6	494
200	30,7	506
300	30,7	518
400	30,7	529
500	30,7	541
600	30,7	553
700	30,8	564
800	31,1	576
900	31,6	588
1000	31,9	599
1100	32,2	610
1200	32,5	621
1300	32,9	632
1400	33,3	643
1500	33,6	654
1600	33,4	665
1700	33,1	675
1800	32,8	686
1900	32,6	697
2000	32,5	708
2100	32,1	720
2200	31,3	731
2300	30,6	743
2400	30,1	754
2500	29,9	766
2600	29,8	779
2700	29,9	791
2800	29,9	803
2900	30,3	815
3000	30,4	826
3100	30,5	838
3200	30,6	849



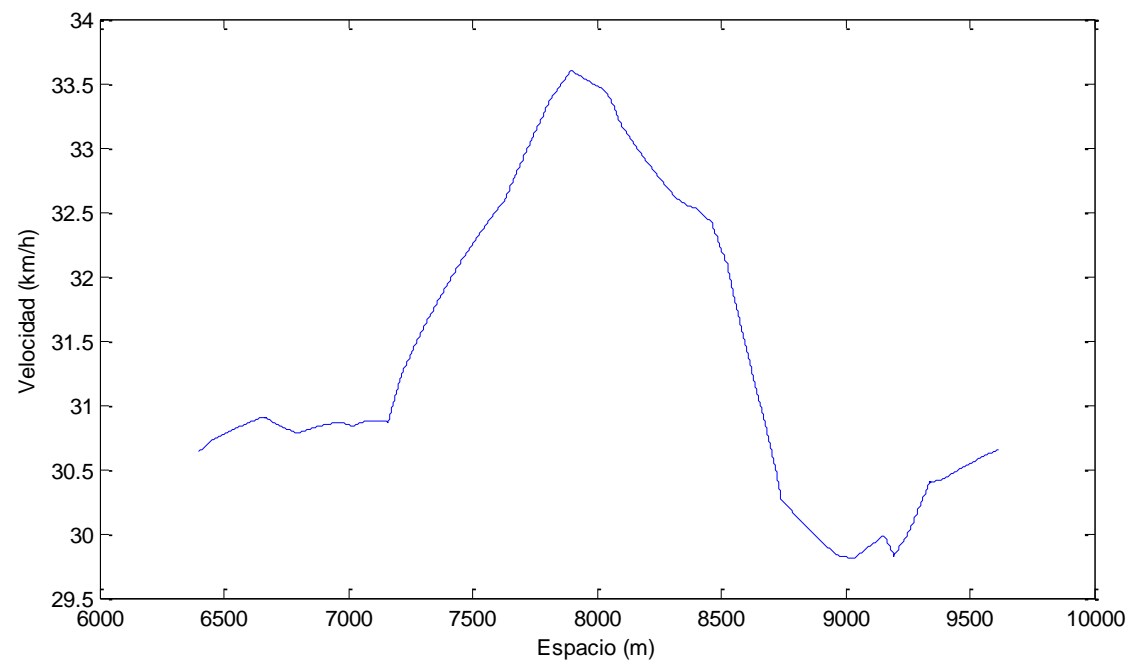
**Tabla 14: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta 2 de 7 a fuerza de tracción constante**

<b>Vuelta 2</b>		
<b>Tiempo (s)</b>	<b>Velocidad (km/h)</b>	<b>Distancia (m)</b>
502	30,4	170
522	30,7	340
542	30,7	511
562	30,7	681
582	30,8	853
602	31,4	1029
622	32,0	1209
642	32,5	1391
662	33,3	1577
682	33,5	1762
702	32,9	1943
722	32,6	2123
742	32,0	2296
762	30,6	2464
782	30,0	2629
802	29,8	2795
822	29,9	2962
842	30,4	3132
850	30,6	3205

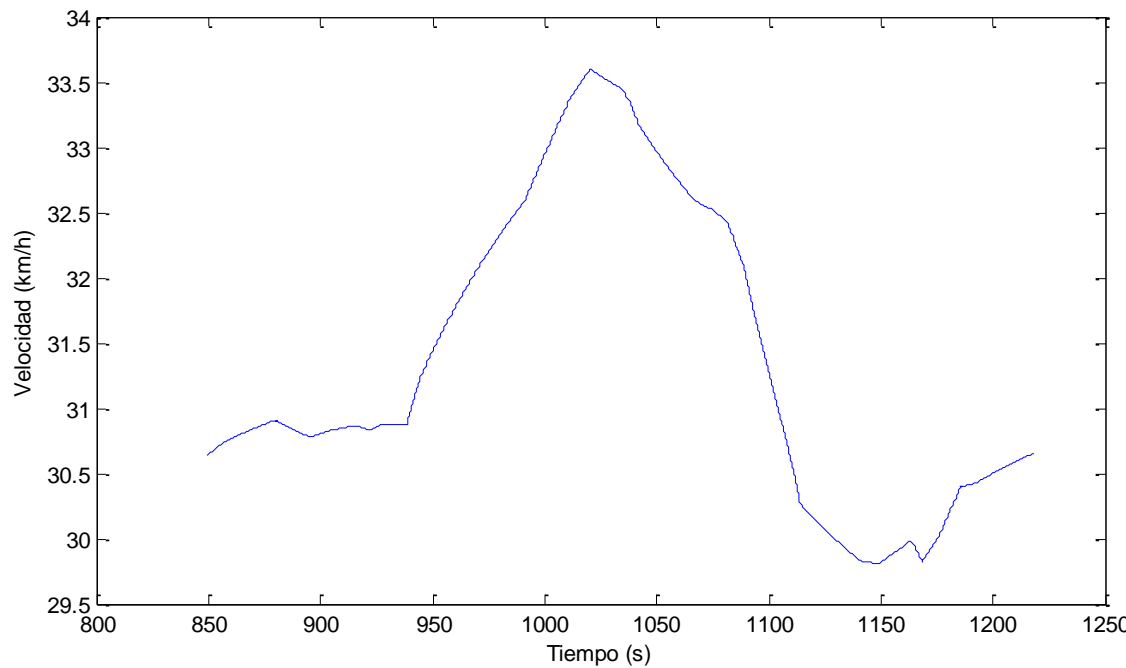
#### **7.1.2.3 Tercera a séptima vuelta**

De la vuelta 3 (Figura 34) en adelante se aprecia que la velocidad inicial y final coinciden por lo que el movimiento del vehículo se puede considerar estable. Las características de la vuelta 3 son:

- Velocidad inicial: 30,6 km/h.
- Velocidad final: 30,6 km/h.
- Velocidad media: 31,4 km/h.



**Figura 34: Velocidad-espacio para la tercera a séptima vuelta a fuerza de tracción constante**



**Figura 35: Velocidad-tiempo para la tercera a séptima vuelta a fuerza de tracción constante**

La velocidad y el tiempo cada 100 metros para las vueltas 3 en adelante se muestran en la Tabla 15 y el espacio recorrido y la velocidad cada 20 segundos en la Tabla 16.

**Tabla 15: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vueltas 3 a 7 a fuerza de tracción constante**

<b>Vuelta 3 a 7</b>		
<b>Distancia (m)</b>	<b>Velocidad (km/h)</b>	<b>Tiempo (s)</b>
100	30,8	862
200	30,9	873
300	30,9	885
400	30,8	896
500	30,8	908
600	30,8	920
700	30,9	931
800	31,1	943
900	31,6	954
1000	31,9	966
1100	32,3	977
1200	32,5	988
1300	32,9	999
1400	33,3	1010
1500	33,6	1021
1600	33,5	1031
1700	33,2	1042
1800	32,9	1053
1900	32,7	1064
2000	32,5	1075
2100	32,2	1086
2200	31,4	1098
2300	30,7	1109
2400	30,1	1121
2500	29,9	1133
2600	29,8	1145
2700	29,9	1157
2800	29,8	1169
2900	30,2	1181
3000	30,4	1193
3100	30,5	1205
3200	30,6	1218

**Tabla 16: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vueltas 3 a 7 a fuerza de tracción constante**

Vuelta 3 a 7		
Tiempo (s)	Velocidad (km/h)	Distancia (m)
870	30,6	162
890	30,8	333
910	30,8	504
930	30,8	675
950	30,9	847
970	31,4	1024
990	32,1	1203
1010	32,6	1386
1030	33,3	1572
1050	33,5	1757
1070	33,0	1938
1090	32,6	2118
1110	32,1	2292
1130	30,7	2459
1150	30,0	2625
1170	29,8	2791
1190	29,8	2958
1210	30,4	3128
1218	30,6	3205

## 7.2 Potencia constante

En este apartado se muestran los resultados obtenidos para un vehículo al que se le aplica una potencia constante a lo largo de todo el recorrido.

### 7.2.1 Resultados para una vuelta lanzada

Los resultados de una vuelta con la misma velocidad inicial y final se muestran en la Tabla 17. En la Figura 36 se representa el perfil de velocidades para una vuelta lanzada. En la Figura 37 se representa la velocidad respecto al tiempo.

Tabla 17: Resultados para una vuelta lanzada a potencia constante

Potencia	0,076 CV
Energía	21.724 J
Velocidad inicial	29,6 km/h

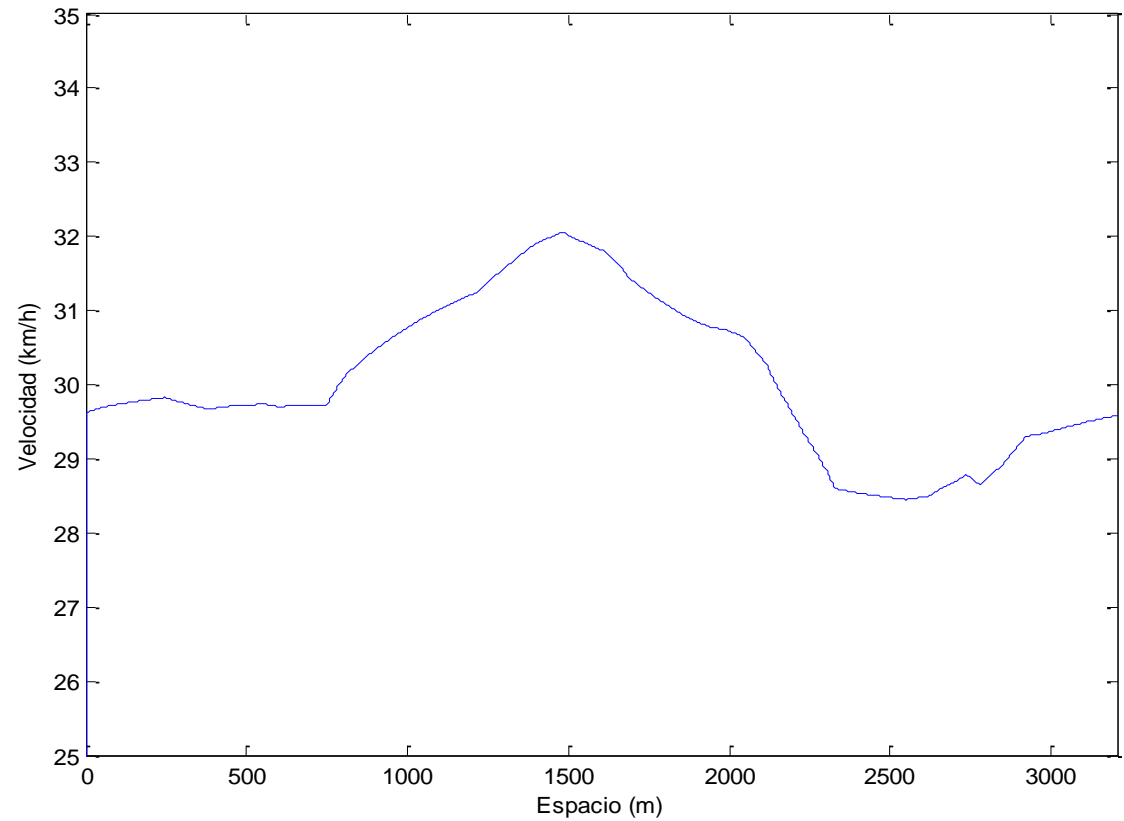
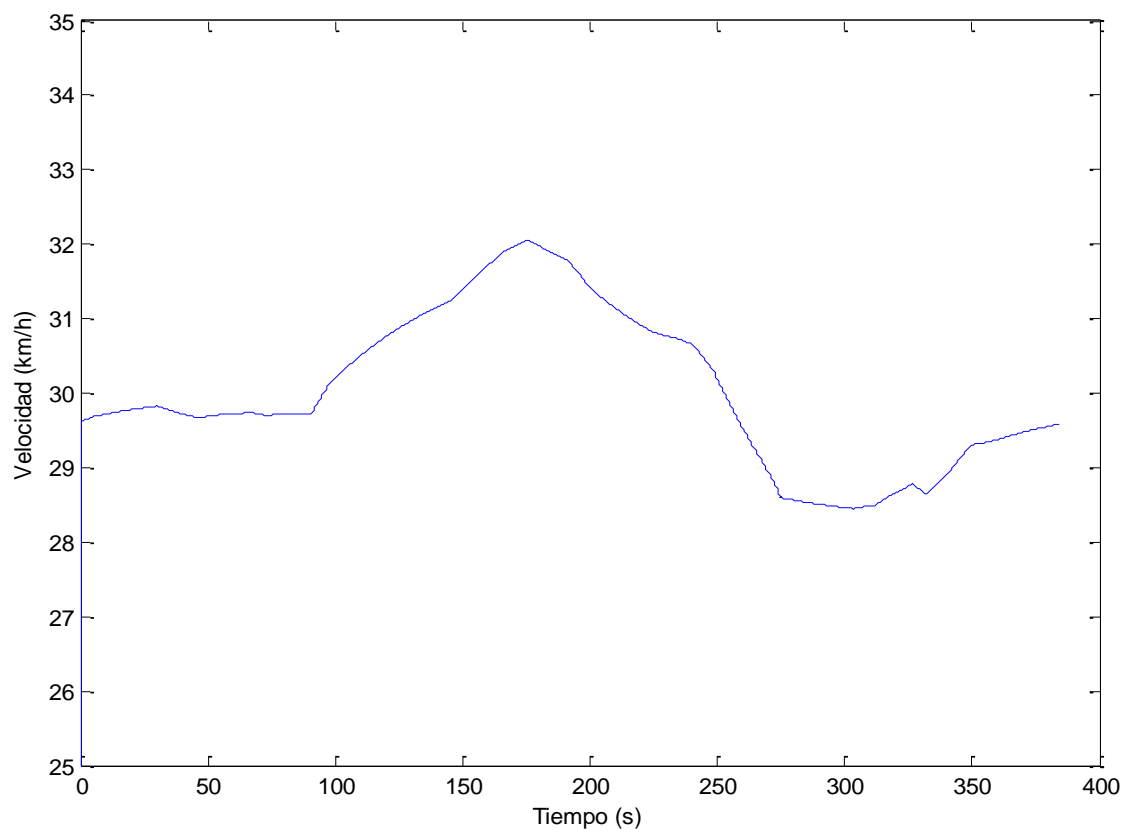


Figura 36: Velocidad-espacio para la vuelta lanzada a potencia constante



**Figura 37: Velocidad-tiempo para la vuelta lanzada a potencia constante**

En la Tabla 18 se muestra la velocidad cada 100 metros y el tiempo que se debe emplear. En Tabla 19 se muestra la velocidad y el espacio recorrido cada 20 segundos.

**Tabla 18: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta lanzada a potencia constante**

Vuelta lanzada		
Distancia (m)	Velocidad (km/h)	Tiempo (s)
100	29,7	12
200	29,8	24
300	29,8	36
400	29,7	48
500	29,7	61
600	29,7	73
700	29,7	85
800	30,1	97
900	30,5	109
1000	30,8	120
1100	31,0	132

Vuelta lanzada		
Distancia (m)	Velocidad (km/h)	Tiempo (s)
1200	31,2	144
1300	31,6	155
1400	31,9	167
1500	32,0	178
1600	31,8	189
1700	31,4	200
1800	31,1	212
1900	30,8	224
2000	30,7	235
2100	30,4	247
2200	29,6	259
2300	28,9	271
2400	28,5	284
2500	28,5	297
2600	28,5	309
2700	28,7	322
2800	28,7	334
2900	29,2	347
3000	29,4	359
3100	29,5	371
3200	29,6	384

Tabla 19: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta lanzada a potencia constante

Vuelta lanzada		
Tiempo (s)	Velocidad (km/h)	Distancia (m)
20	29,8	165
40	29,7	330
60	29,7	495
80	29,7	660
100	30,2	825
120	30,8	995
140	31,2	1167
160	31,7	1341

Vuelta lanzada		
Tiempo (s)	Velocidad (km/h)	Distancia (m)
180	32,0	1518
200	31,4	1694
220	30,9	1867
240	30,7	2038
260	29,5	2205
280	28,6	2366
300	28,5	2525
320	28,7	2683
340	28,9	2842
360	29,4	3004
380	29,6	3168
384	29,6	3205

### 7.2.2 Resultados para las 7 vueltas

Los resultados obtenidos para las 7 vueltas a potencia constante se muestran en la Tabla 20.

**Tabla 20: Resultados para las 7 vueltas a potencia constante**

<b>Potencia</b>	0,080 CV
<b>Energía total</b>	159.630 J
<b>Velocidad final</b>	30,1 km/h

En este caso de 7 vueltas a potencia constante el vehículo no necesita más que la primera vuelta para estabilizarse, de la vuelta 2 hasta la 7 el perfil de velocidades es el mismo.

En la Figura 38 se representa la velocidad y el espacio para las 7 vueltas y en la Figura 39 se representa la velocidad y el tiempo.



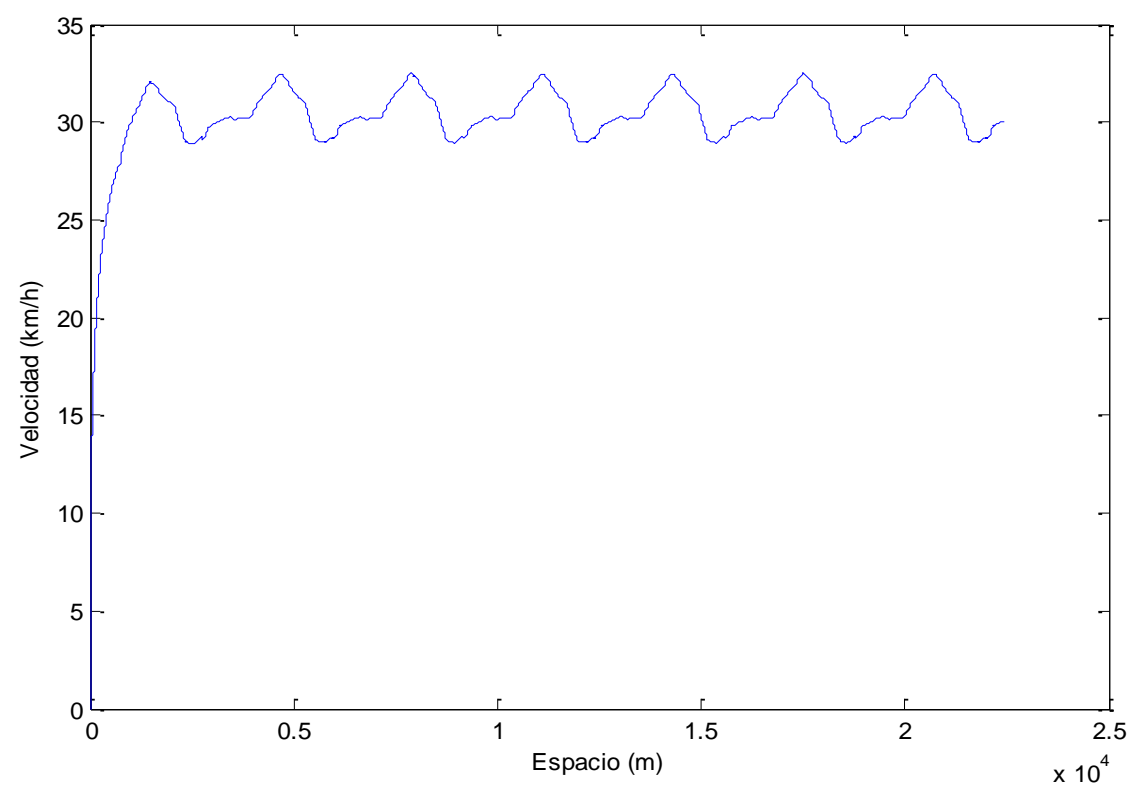


Figura 38: Velocidad-Espacio para las 7 vueltas a potencia constante

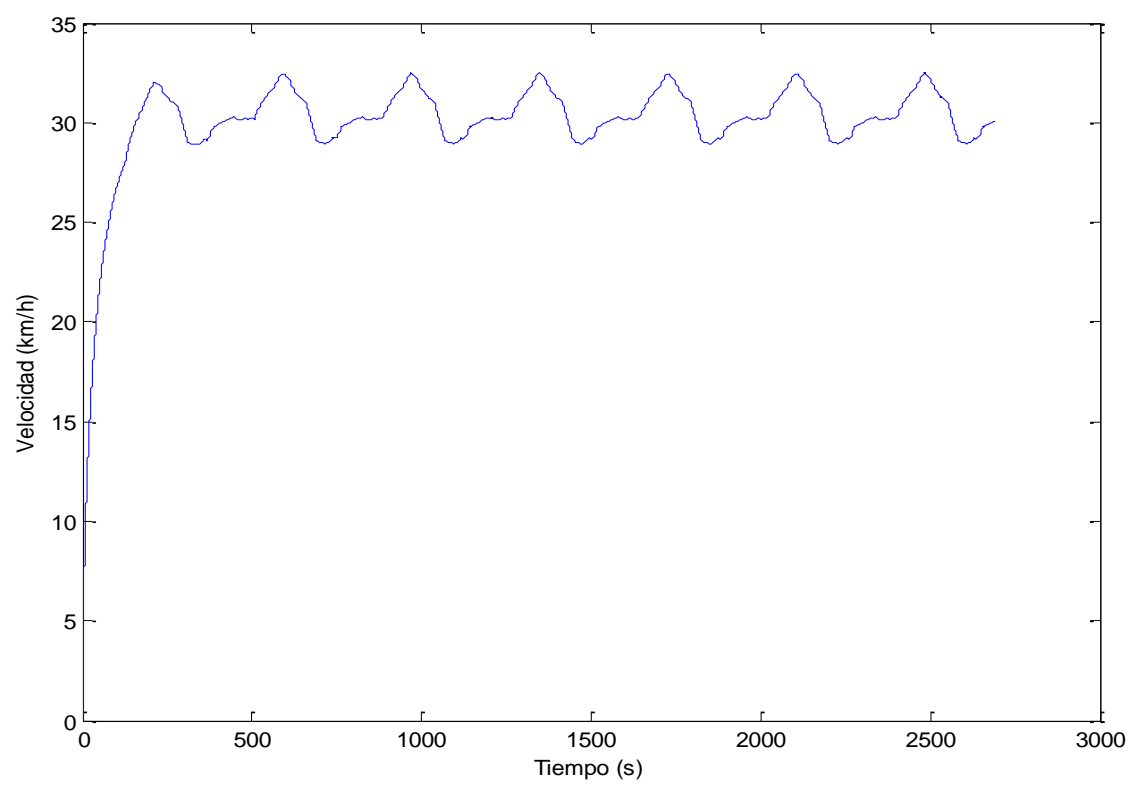


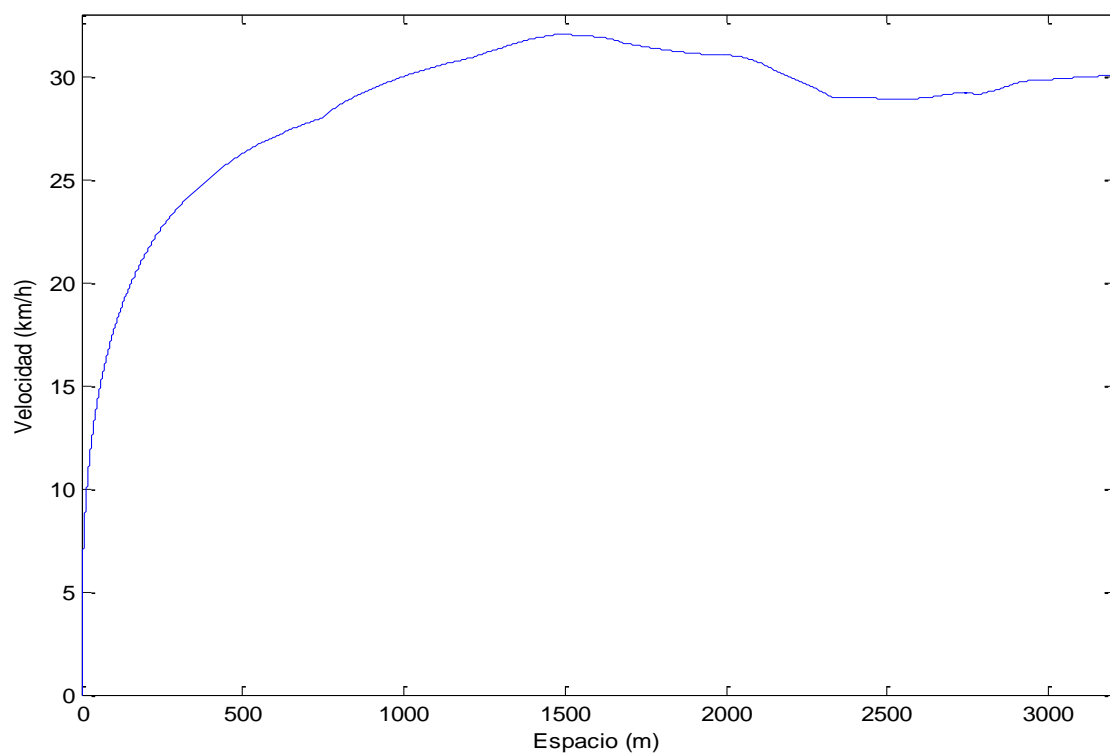
Figura 39: Velocidad-tiempo para las 7 vueltas a potencia constante

### 7.2.2.1 Primera vuelta

En la Figura 40 se muestra el perfil de velocidades para la primera vuelta en la cual el vehículo parte del reposo y en la Figura 41 se muestra la velocidad respecto al tiempo. En la primera vuelta los resultados obtenidos son los siguientes:

- Velocidad final: 30,1 km/h.
- Velocidad media: 27,6 km/h.
- Energía: 24.685 J.

En la Tabla 21 se muestra la velocidad y el tiempo cada 100 metros y en la Tabla 22 se muestra la velocidad y el espacio que debe haber recorrido el vehículo cada 20 segundos.



**Figura 40: Velocidad-espacio para la primera vuelta**

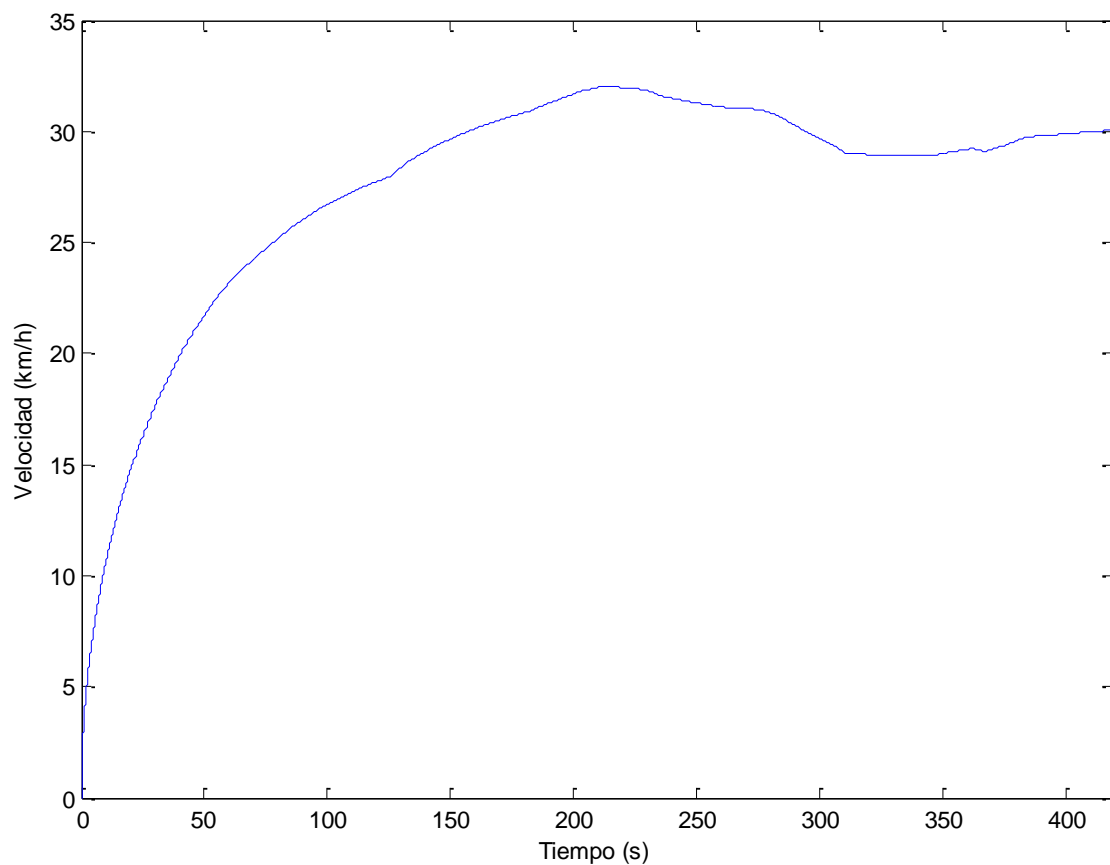


Figura 41: Velocidad-tiempo para la primera vuelta

Tabla 21: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vuelta 1 de 7 a potencia constante

Vuelta 1		
Distancia (m)	Velocidad (km/h)	Tiempo (s)
100	17,6	30
200	21,4	48
300	23,6	64
400	25,1	79
500	26,2	93
600	27,0	106
700	27,7	120
800	28,6	132
900	29,4	145
1000	30,0	157
1100	30,5	169
1200	30,9	181
1300	31,3	192

Vuelta 1		
Distancia (m)	Velocidad (km/h)	Tiempo (s)
1400	31,8	204
1500	32,0	215
1600	31,9	226
1700	31,6	237
1800	31,3	249
1900	31,1	260
2000	31,0	272
2100	30,7	284
2200	29,9	296
2300	29,3	308
2400	29,0	320
2500	28,9	333
2600	28,9	345
2700	29,1	357
2800	29,2	370
2900	29,6	382
3000	29,8	394
3100	29,9	406
3200	30,0	418

Tabla 22: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vuelta 1 de 7 a potencia constante

Vuelta 1		
Tiempo (s)	Velocidad (km/h)	Distancia (m)
20	14,7	55
40	19,9	153
60	23,1	273
80	25,1	407
100	26,7	551
120	27,7	702
140	29,1	860
160	30,1	1024
180	30,8	1194
200	31,7	1367

Vuelta 1		
Tiempo (s)	Velocidad (km/h)	Distancia (m)
220	32,0	1544
240	31,5	1721
260	31,1	1894
280	30,9	2066
300	29,7	2234
320	29,0	2396
340	28,9	2557
360	29,2	2718
380	29,5	2880
400	29,9	3045
418	30,0	3205

#### 7.2.2.2 Segunda a séptima vuelta

En el caso de 7 vueltas a potencia constante el vehículo no tarda más que una vuelta en estabilizarse. En la Figura 42 se muestra la velocidad frente al espacio y en la Figura 43 se muestra la velocidad frente al tiempo para la segunda vuelta en adelante. Los resultados para la segunda a séptima vueltas son:

- Velocidad inicial: 30,1 km/h.
- Velocidad media: 30,5 km/h.
- Energía por vuelta: 22.490 J.

En la Tabla 23 se muestra la velocidad y el tiempo que debe marcar el vehículo cada 100 metros. En la Tabla 24 se muestra la velocidad y el espacio recorrido por el vehículo cada 20 segundos.

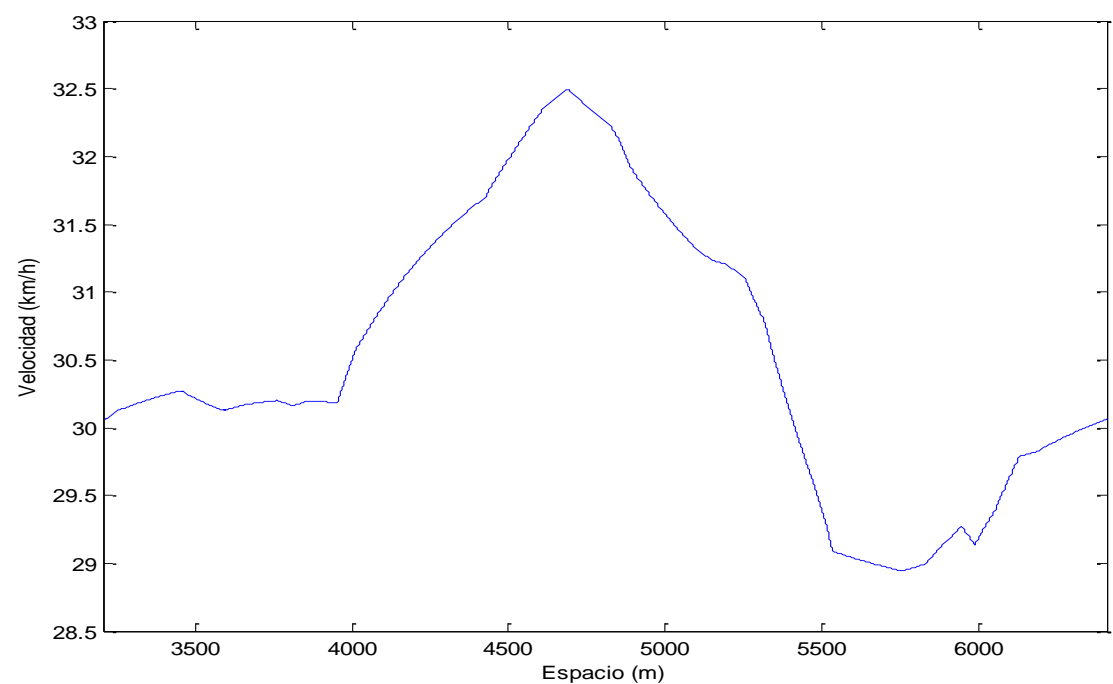


Figura 42: Velocidad-espacio para la segunda vuelta hasta la séptima

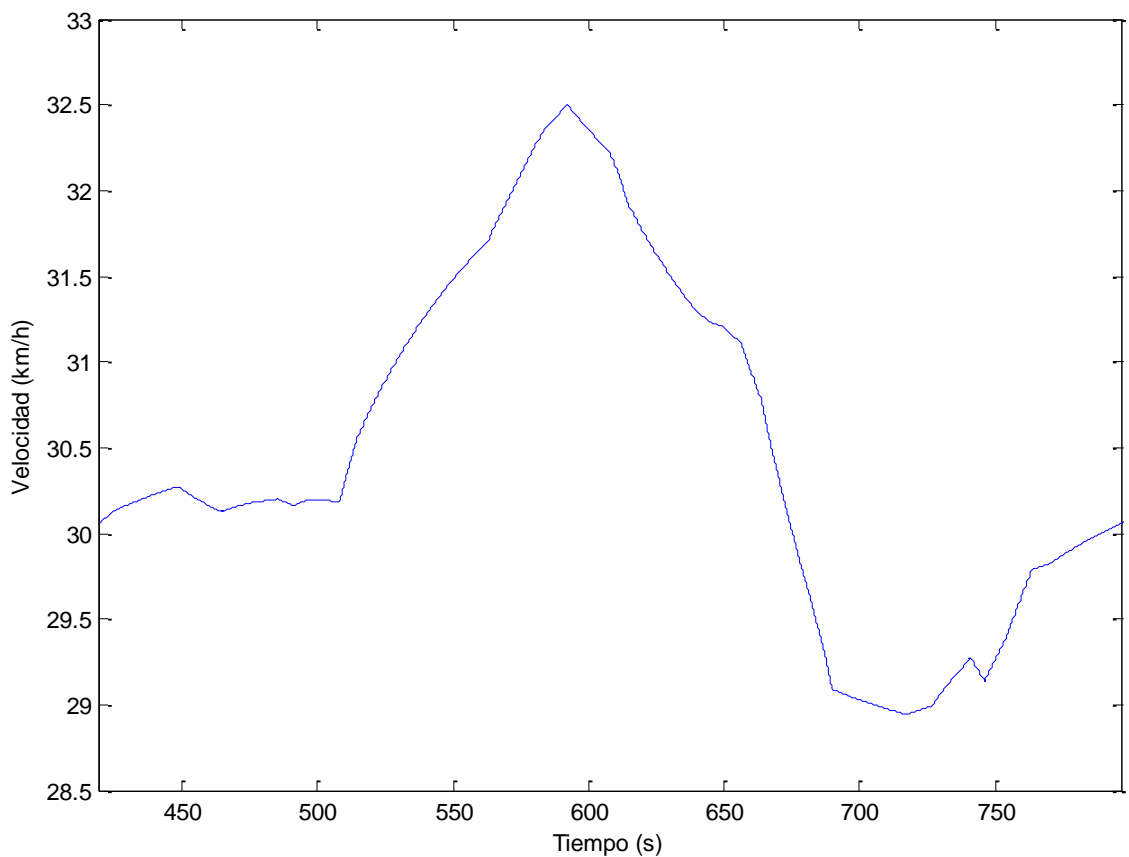


Figura 43: Velocidad-tiempo para la segunda vuelta hasta la séptima

**Tabla 23: Velocidad y tiempo para un espacio recorrido en vueltas 2 a 7 a potencia constante**

<b>Vuelta 2 a 7</b>		
<b>Distancia (m)</b>	<b>Velocidad (km/h)</b>	<b>Tiempo (s)</b>
100	30,2	431
200	30,2	443
300	30,2	455
400	30,1	466
500	30,2	478
600	30,2	490
700	30,2	502
800	30,5	514
900	30,9	526
1000	31,2	537
1100	31,5	549
1200	31,7	560
1300	32,0	572
1400	32,3	583
1500	32,5	594
1600	32,3	605
1700	31,9	616
1800	31,6	628
1900	31,3	639
2000	31,2	651
2100	30,8	662
2200	30,1	674
2300	29,4	686
2400	29,0	699
2500	29,0	711
2600	29,0	723
2700	29,2	736
2800	29,2	748
2900	29,7	760
3000	29,8	772
3100	30,0	784
3200	30,1	796

**Tabla 24: Velocidad y espacio recorrido para un tiempo en vueltas 2 a 7 a potencia constante**

Vuelta 2 a 7		
Tiempo (s)	Velocidad (km/h)	Distancia (m)
438	30,2	167
458	30,2	335
478	30,2	503
498	30,2	670
518	30,7	838
538	31,2	1011
558	31,6	1185
578	32,2	1362
598	32,4	1542
618	31,8	1720
638	31,3	1895
658	31,0	2068
678	29,8	2237
698	29,0	2400
718	28,9	2561
738	29,2	2722
758	29,6	2884
778	29,9	3050
798	30,1	3205

### 7.3 Recorrido del vehículo

Una vez obtenidos la velocidad, espacio y tiempo se puede hacer una representación de los puntos obtenidos en un gráfico. En la Figura 44 se representan las coordenadas x e y obtenidas. En las Figura 45 y Figura 46 se ilustra el recorrido del circuito en 3 dimensiones.



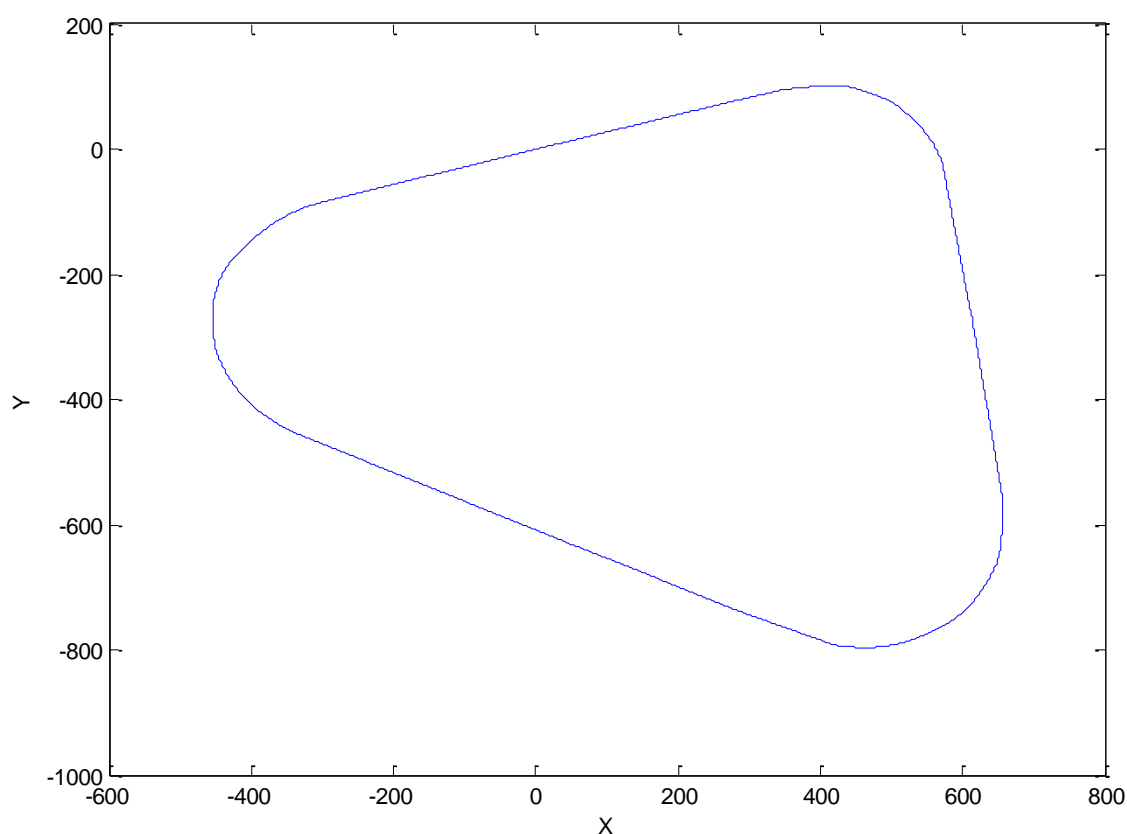


Figura 44: Recorrido del circuito

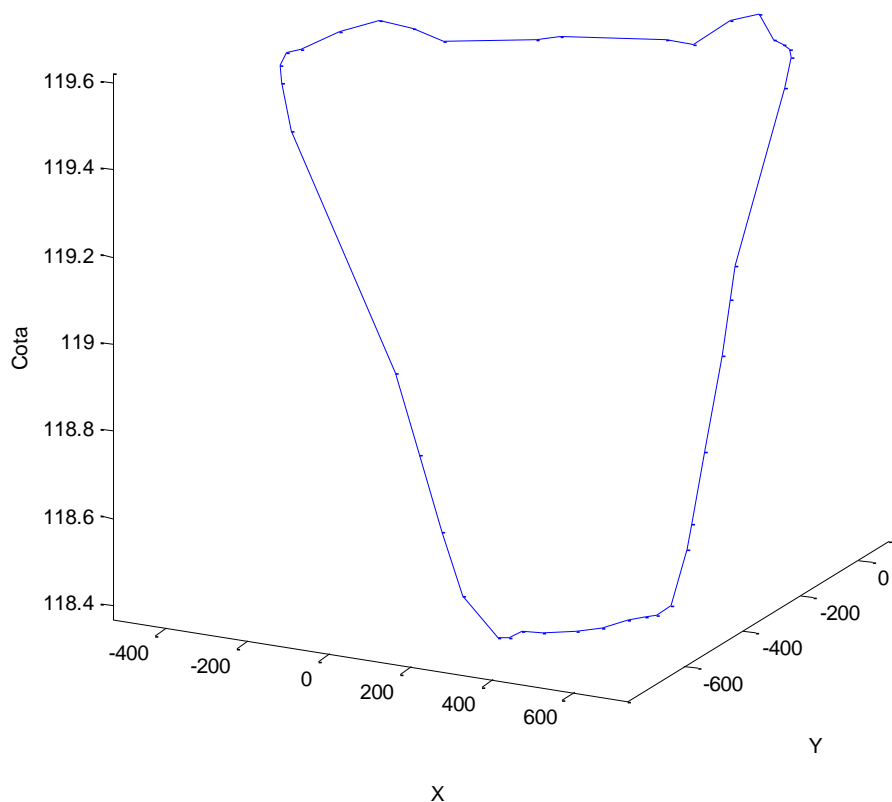


Figura 45: Vista 1 del circuito en 3D

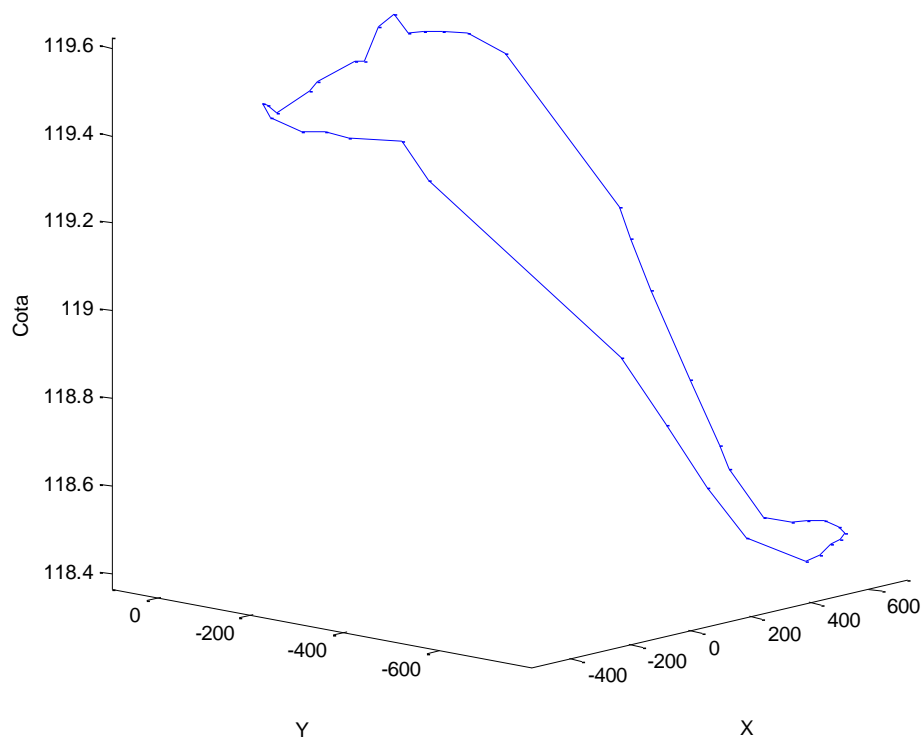


Figura 46: Vista 2 del circuito en 3D

## 7.4 Comprobación de los resultados obtenidos

Una vez obtenidos los resultados es indispensable comprobar si el vehículo cumple con las ecuaciones de la dinámica lateral y conocer si vuelca o derrapa.

### 7.4.1 Comprobación de las rectas

En los tramos rectos está claro que el vehículo no puede derrapar ya que el radio de curvatura es infinito por lo que la velocidad de derrape dada por la Ec. 12 es infinito. El vuelco tal y como se entiende con la Ec. 14 también es infinito por lo que sería imposible que volcara pero dado que el vehículo avanza con un peralte el concepto de vuelco se asemejaría al de un cuadrado descendiendo por una pendiente (Figura 47).

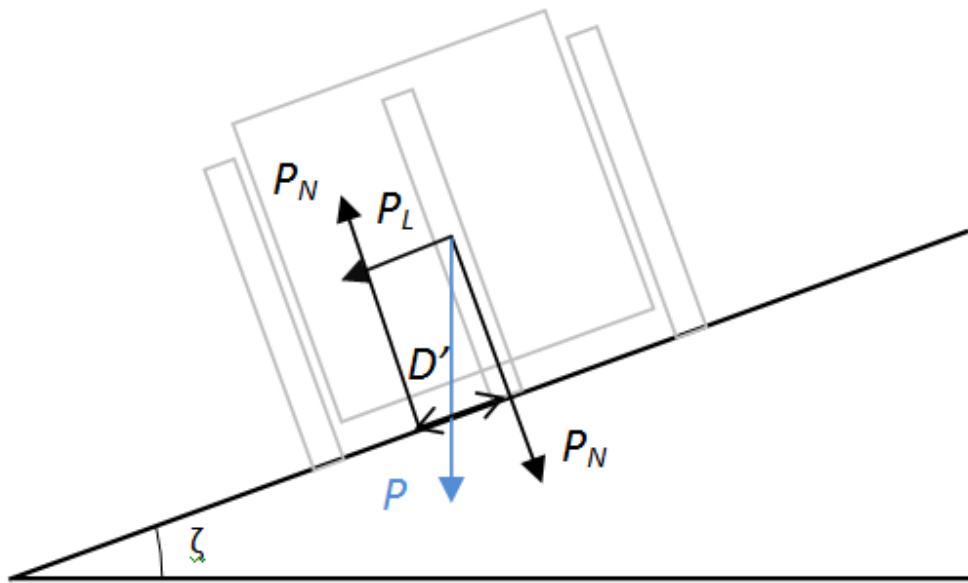


Figura 47: Vehículo circulando por una recta con peralte

De la Figura 47 se deduce que el vehículo vuelca si:

$$P_L \cdot h > P_N \cdot D'$$

Ec. 93

El máximo peralte para un tramo recto es 0,1125 rad.

$$P_L \cdot h = 120 \cdot 9,81 \cdot \sin 0,1125 \cdot 0,22 = 29,07 \text{ Nm}$$

$$P_N \cdot D' = 120 \cdot 9,81 \cdot \cos 0,1125 \cdot 0,083 = 97,09 \text{ Nm}$$

Como el producto  $P_L \cdot h$  es mucho menor que  $P_N \cdot D'$  es vehículo no vuelca.

### 7.4.2 Comprobación de las curvas

En el caso de los tramos curvos se hace una primera comprobación con la máxima velocidad que alcanza el vehículo suponiendo un tramo con un peralte nulo y con el radio mínimo de todos los tramos.

El menor de todos los radios de las curvas es 94,2 m.

De la Ec. 12, la velocidad límite de derrape es:

$$V_{ld} = \sqrt{g \cdot R \cdot \frac{\mu_y + \tan \zeta}{1 - \mu_y \cdot \tan \zeta}} = \sqrt{9,81 \cdot 94,2 \cdot 0,75} = 26,32 \frac{m}{s} = 94,8 \frac{km}{h}$$

De la Ec. 14 la velocidad límite de vuelco es:

$$V_{lv} = \sqrt{g \cdot R \cdot \frac{\frac{D'}{2 \cdot h} + \tan \zeta}{1 - \frac{D'}{2 \cdot h} \cdot \tan \zeta}} = \sqrt{9,81 \cdot 94,2 \cdot \frac{0,083}{2 \cdot 0,22}} = 13,2 \frac{m}{s} = 47,5 \frac{km}{h}$$

En un tramo real con un peralte de 0,1489 rad las velocidades límite de vuelco y de derrape son:

$$V_{ld} = 30,3 \frac{m}{s} = 109,1 \frac{km}{h}$$

$$V_{lv} = 17,9 \frac{m}{s} = 64,6 \frac{km}{h}$$

La máxima velocidad que alcanza el vehículo es de 33,6 km/h, por lo que la estabilidad y seguridad del vehículo quedan más que aseguradas incluso en el caso más desfavorable.

## 8 Conclusiones y trabajos futuros

Al describir el circuito con ecuaciones de rectas o curvas han aparecido una serie de problemas. Al modelizar los tramos se han supuesto los datos de los tramos como el radio de la curva o la pendiente constantes. En el caso de las rectas se puede comprobar que los tramos pertenecientes a la misma recta no tienen exactamente la misma orientación, sino que varía ligeramente, para la recta 1 la desviación entre el mayor y menor ángulo es de  $1,63^\circ$ , en el caso de la recta 2 de  $2,91^\circ$  y en la recta 3 de  $1,16^\circ$ . En las curvas, mencionar que los tramos curvos se han modelado suponiendo un radio constante a lo largo del tramo, en una curva real el radio no tiene por qué ser constante sobre todo a la entrada y la salida, es por ello que, sobre todo en la curva 3, los radios oscilan de uno mayor a otro menor y así sucesivamente. También mencionar que al acabar el tramo curvo la orientación debe coincidir con la del tramo recto posterior. Según se ha modelado el sistema y se han calculado los tramos curvos resulta muy difícil que ambos ángulos de orientación coincidieran por lo que presentan un pequeño error, para el enlace de la curva 1 con la recta 2 el error es de  $2,76^\circ$  para el enlace de la curva 2 con la recta 3 es de  $1,08^\circ$  y para la curva 3 con la recta 1 es de  $6,71^\circ$ . El error tan grande en la curva 3 no es de extrañar ya que como se mencionó antes, los radios de un tramo a otro varían enormemente (el mayor de 969 metros). Tampoco se ha considerado el paso gradual de la pendiente de un tramo al siguiente, pero al tratarse de pendientes muy pequeñas (la mayor de  $0,43^\circ$ ) se puede considerar despreciable este efecto.

El vehículo debe dar un total de 8 vueltas al circuito Eurospeedway partiendo del reposo en un total de 51 minutos, es decir, debe tener una velocidad media mínima de 30 km/h. La razón por la cual se ha decidido realizar tan solo las 7 primeras vueltas se debe a dos motivos. El primero es que no se ha considerado que la fuerza de tracción pueda variar a lo largo del recorrido y el segundo motivo se debe al primero, es decir, al frenar el vehículo, habría que dejar de aplicar la fuerza de tracción y se podría aprovechar la inercia que lleva el vehículo para ir deteniéndolo sin necesidad de accionar el sistema de frenado.

Según los resultados obtenidos el trayecto realizado con una potencia constante en 7 vueltas utiliza menos energía que el realizado con una fuerza de tracción constante (159.630 J frente a los 162.880 J). En el caso de la vuelta lanzada la energía empleada con una potencia constante también es menor, pero el margen entre uno y otro es mucho más reducido (21.735 J con una fuerza de tracción constante y 21.724 J con una potencia constante).

El método de Lagrange da como resultado una energía que necesita el coche al aplicar una fuerza de tracción justo en la rueda, es decir, sin considerar las pérdidas en el motor, embrague y transmisión, por lo que el consumo real del motor será ligeramente superior. Una vez conocidas las pérdidas se podría dar un valor más preciso del consumo. Aún así, ninguno de los dos resultados es exacto realmente, ya que dependiendo del régimen de giro que lleve el motor, éste dará una potencia o fuerza de tracción variable con la velocidad, no obstante como la variación de velocidad es de no más de 5 km/h para los dos casos se puede considerar que el consumo específico en ese rango es prácticamente constante si se logra que el motor trabaje en torno a ese punto.

En la simulación se ha usado un paso fijo de 0,01 segundos ya que se ha comprobado que para un paso de 0,001 segundos la solución no variaba hasta el tercer o cuarto dígito decimal.

En la búsqueda de un valor óptimo de la fuerza de tracción se podía haber empleado la herramienta “Search pattern tool” de Matlab, la razón por la cual no se ha empleado es que se trata de variables tan simples que son aproximadamente lineales y crecientes (cuanta más fuerza de tracción mayor velocidad se alcanzará) y no da lugar a mínimos locales, y con el cálculo en el proceso de convergencia se han hecho como mucho 12 iteraciones.

La razón por la cual se calcula  $V_0$  en el cálculo de la vuelta lanzada como  $0,3V_0 + 0,7V_f$  es que se ha comprobado en distintos casos, todos ellos con datos factibles, que se alcanza la solución óptima con menos iteraciones.

En la simulación de simulink existe una anomalía cuando el vehículo parte de una velocidad distinta de cero y se deja que pare libremente (fuerza de tracción o potencia cero) y es que a medida que la velocidad se acerca a cero las fuerzas de resistencia se van haciendo más pequeñas ya que dependen de la velocidad pero la fuerza de resistencia a la rodadura no se hace nunca cero por el término  $c_1$  de la Ec. 6, es por ello que según se ha diseñado el sistema cuando el vehículo tiene velocidad “0” siempre existe una fuerza que empuja el vehículo hacia atrás, y a medida que va cogiendo velocidad “negativa” la fuerza aerodinámica va favoreciendo cada vez más este efecto. El motivo por el cual no se han solucionado este problema es que dado que no se ha considerado a estudio la última vuelta en la que el vehículo se debe detener nunca se puede dar el caso de que existan velocidades cercanas a 0. Otro hecho que refuerza la

afirmación de que el vehículo no llegue a pararse, es que en la búsqueda del óptimo se parte de una fuerza de tracción o potencia mucho mayor de la necesaria.

En la comprobación de la velocidad límite de vuelco y derrape en los tramos curvos se ha elegido la situación más desfavorable, es decir, un hipotético tramo curvo sin peralte. El motivo de esta elección es que la competición Shell Eco-marathon no promueve el llevar los vehículos a su límite de prestaciones sino la seguridad ante todo. Como la velocidad límite de vuelco (47,5 km/h) y de derrape (94,8 km/h) es mucho mayor que la velocidad que alcanza el vehículo en cualquier punto del circuito (33,6 km/h) no se han hecho cálculos más precisos de ambas velocidades ya que queda asegurada la seguridad del vehículo y piloto.

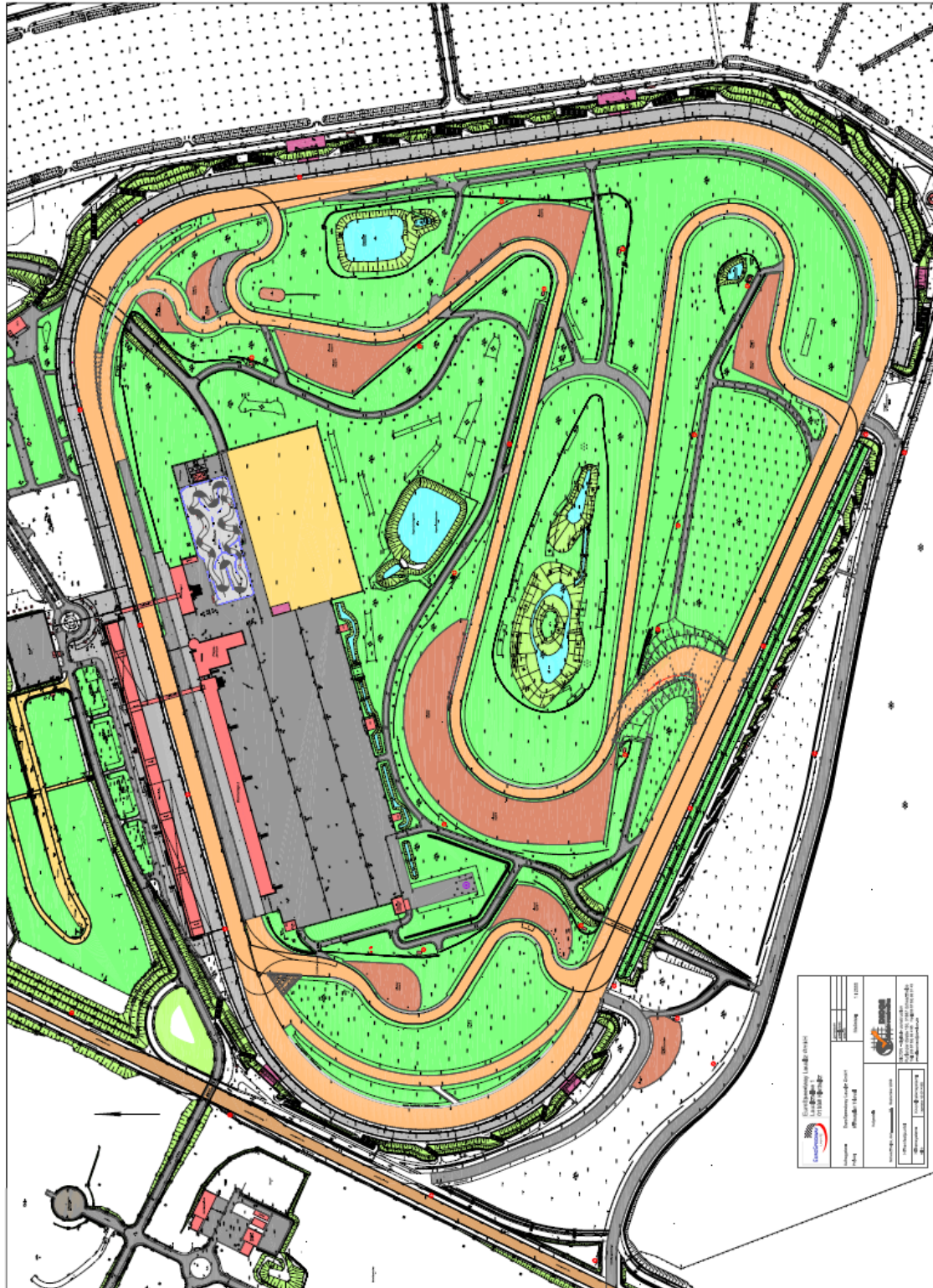
Como trabajo futuro se puede plantear el problema con una fuerza de tracción o potencia variable a lo largo del recorrido e introducir una fuerza de frenado que actúe en la última vuelta para frenar el vehículo y así obtener un valor de la energía más preciso. Además de poder tener una fuerza de tracción o potencia variable se puede tener en cuenta el consumo del motor para cada régimen de giro y obtener a partir de las revoluciones la fuerza de tracción o potencia que desarrolla el motor.

## 9 Referencias

- [1] Contaminación del Aire. K. Wark, C.F. Warner. Editorial Limusa (1992).
- [2] Web de la Unión Europea. Legislación referente a la contaminación atmosférica. Febrero 2011.  
([http://europa.eu/legislation\\_summaries/enviroment/air\\_pollution/index\\_es.htm](http://europa.eu/legislation_summaries/enviroment/air_pollution/index_es.htm)).
- [3] Reglamento oficial 2011 Shell Eco-Marathon.
- [4] Teoría de vehículos automóviles. F. Aparicio Izquierdo, C. Vera Álvarez, V. Díaz López. Sección de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales (1995).
- [5] Ingeniería del automóvil. C. Vera Álvarez, P. Luque Rodríguez, D. Álvarez Mántaras. Ediciones Paraninfo (2004).
- [6] Mecánica clásica. H. Goldstein. Editorial Reverté (1996).
- [7] Dinámica clásica. A. Rañada. Alianza Editorial (1994).
- [8] Mecánica. L.D. Landau, E.M. Editorial Reverté (1985).
- [9] <http://www.shell.com/ecomarathon>. Febrero 2010.
- [10] <http://www.eurospeedway.de>. Octubre 2009.
- [11] <http://stadionwelt.de>. Febrero 2011.
- [12] Antonio Seller Robles. Proyecto fin de carrera: “Diseño y cálculo de la estructura de un prototipo destinado a participar en la competición Shell Eco-marathon”. Universidad Carlos III de Madrid, 2011.



## ANEXO A Plano del circuito Eurospeedway de Lausitz



**Figura 48: Plano reducido del circuito Eurospeedway de Lausitz [9]**

## ANEXO B      Cálculo de la fuerza lateral y la fuerza normal de un vehículo sobre un tramo peraltado.

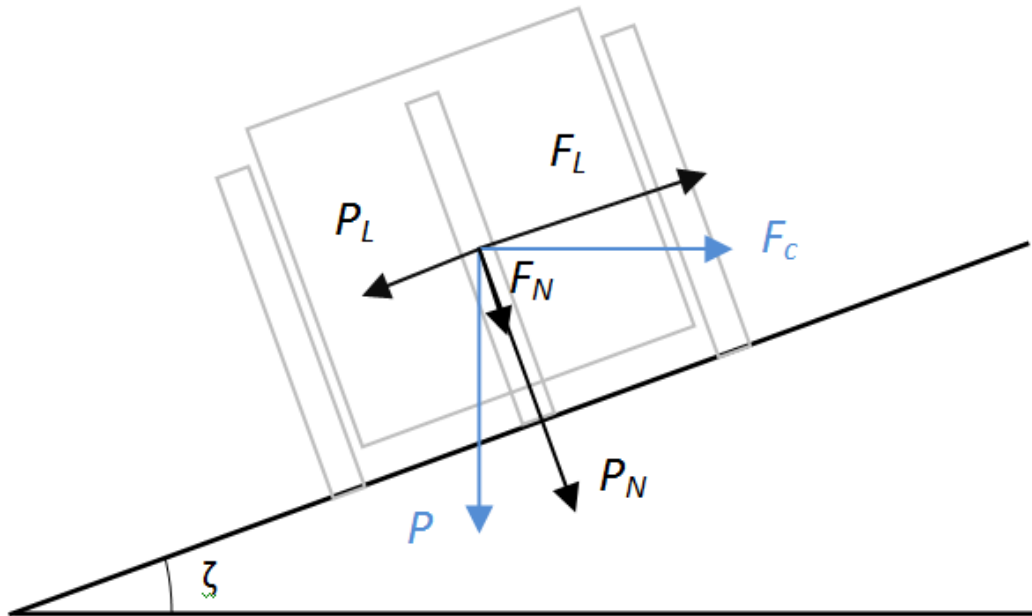


Figura 49: Fuerza lateral y normal de un vehículo circulando por una curva

Un vehículo que circula por una curva con peralte sufre una variación de la fuerza normal y la fuerza lateral. Según la figura la fuerza lateral ( $F_{lat}$ ) y la fuerza normal ( $F_N$ ) son:

$$F_{lat} = F_L - P_L = F_C \cos \zeta - P \sin \zeta$$

$$F_{zt} = F_N + P_N = F_C \sin \zeta + P \cos \zeta$$

Donde:

- $\zeta$  es el ángulo del peralte.
- $P$  es el peso del vehículo.
- $F_C$  es la fuerza centrífuga.